Representatietheorie

Matthijs Muis
s1066918

June 22, 2024

3.1

- Een groepactie van G op X is hetzelfde als een homomorfisme $G \to S_X$.
- Een representatie van een groep is juist een homomorfisme $\varphi : G \to GL(V)$ waar V een eindige niet-triviale lineaire ruimte is.
- $\dim V$ wordt de *graad* van φ genoemd.
- Als ψ en φ representaties zijn van G en V en W een lineair isomorfisme $T : V \to W$ hebben zodat $\varphi_g = T\psi_g T^{-1}$ voor elke $g \in G$, dan heten φ en ψ *equivalente representaties*
- Voorbeeld: $\mathbb{C} \to GL_2(\mathbb{R})$ door $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ is een representatie.
- Voorbeeld: $\mathbb{Z}_n \to GL_2(\mathbb{C})$ door

  $$\varphi_{\overline{m}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi m}{n} & -\sin \frac{2\pi m}{n} \\ \sin \frac{2\pi m}{n} & \cos \frac{2\pi m}{n} \end{pmatrix}$$

  Dat is de rotatiematrix voor een hoek van $2\pi m/n$ radialen. Omdat $\mathbb{Z}_n$ met $+$ een cyclische groep is, en de n-de rotaties van $\mathbb{C}$ de rotatiegroep vormen (welke ook cyclisch op n elementen is) volgt dat dit een homomorfisme is.

  Een andere representatie is

  $$\psi_{\overline{m}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi m}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi m}{n}} \end{pmatrix}$$

  Dit is een equivalente representatie, namelijk neem $T = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dan $T^{-1}\varphi_{\overline{m}}T = \psi_{\overline{m}}$, voor alle $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$.
- (Standaardrepresentatie van S_n). Dit is de permutatiematrix, welke e_m op $e_{\sigma(m)}$ afbeeldt voor $m = 1, ..., n$.

- Hoe zien de matrices van de alternerende groepselementen $A_n \subset S_n$ eruit? Dit zijn precies de even permutaties.

  Het verwisselen van twee kolommen i, j in een permutatiematrix S is hetzelfde als vermenigvuldigen met $\phi_{(ij)}$, de representatie van de verwisseling (ij). Omdat de determinant een homomorfisme is, zal dit het teken van S precies veranderen. Merk op dat de identiteitsmatrix determinant 1 heeft en dat alle permutatiematrices ontbonden kunnen worden in verwisselingen. Er volgt dat het beeld van A_n onder de standaardrepresentatie precies de permutatiematrices met determinant 1 zijn:

$$\varphi(A_n) = \{P_\sigma : \det(P_\sigma) = 1\} = \ker(\det)$$

  We verkrijgen dat $A_n \trianglelefteq S_n$.

- (G-invariante deelruimte) $\varphi : G \to GL(V)$ representatie. Dan heet een lineaire deelruimte $W \subset V$ G-invariant als voor alle $g \in G$ en $w \in W$¡ $\varphi_g w \in W$.

- (Directe som van lineaire afbeeldingen) $T_1 : V_1 \to W_1$, $T_2 : V_2 \to W_2$, dan $T_1 : V_1 \oplus V_2 \to W_1 \oplus W_2$ definieert men als $(T_1 \oplus T_2)(v_1, v_2) = (T_1 v_1, T_2 v_2)$, waarbij de directe som van lineaire ruimtes gewoon het carthesisch product met elementsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging is (hierbij moeten V_1, V_2, W_1, W_2 wel hetzelfde grondlichaam K hebben).

- (Directe som van representaties). φ, ψ representaties $G \to GL(V_1)$, $G \to GL(V_2)$ met V_1, V_2 hetzelfde grondlichaam K. Dan is hun directe som $(\varphi \oplus \psi) : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$ gegeven door:

$$(\varphi \oplus \psi)_g(v_1, v_2) = (\varphi_g(v_1), \psi_g(v_2))$$

- In termen van matrixalgebra kunnen we een directe som $K^n \oplus K^m$ opvatten als K^{n+m} en directe sommen $T_1 \oplus T_2 : K^{n+m} \to K^{n+m}$ van operatoren $T_1 \in GL(K^n)$, $T_2 \in GL(K^m)$ als blokmatrices

$$(T_1 \oplus T_2) = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

  Met dus duidelijk al twee invariante deelruimtes $\langle e_i \rangle_{i=1,..,n}$, $\langle e_i \rangle_{i=n+1,...,m}$.

- Voor $\psi : \mathbb{Z}_n \to GL_2(\mathbb{C})$ zien we dat $\psi_{\overline{m}}$ diagonaal is voor elke $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$ en in het bijzonder dus als directe som $\psi_1 \oplus \psi_2$ met $\psi_1(\overline{m}) = e^{2\pi i m/n}$, $\psi_2(\overline{m}) = \psi_1(-\overline{m})$

- Neem $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ gedefinieerd door zijn waarden op de voortbrengers (12) en (123):

$$\rho_{(12)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_{(123)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En zij $\psi : S_3 \to GL_1(\mathbb{C}) = C^*$ door $\psi_\sigma = 1$, $\forall \sigma \in S_3$. Dan

$$(\rho \oplus \psi)_{(12)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\rho \oplus \psi)_{(123)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Het zou voldoende zijn om aan te tonen dat $(\rho \oplus \psi)_{(12)}$ similar is tot $\varphi_{(12)}$ en $(\rho \oplus \psi)_{(123)}$ similar is tot $\varphi_{(123)}$ met dezelfde basistransformatie T, te kunnen concluderen dat $\rho \oplus \psi \sim \varphi$.

Dit omdat we dan hebben laten zien dat dan $T(\rho \oplus \psi)_\sigma T^{-1} = T\varphi_\sigma T^{-1}$ voor $\sigma \in \{(12), (123)\}$, een generating set van S_3, en dat zou de gelijkheid impliceren voor elke $\sigma \in S_3$. Dit komt er dus eigenlijk op neer aan te tonen dat

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

Dit is een kwestie van lineaire algebra.

- (Triviale representatie) Dit is de representatie $t : G \to \mathbb{C}^*$ met $\varphi(g) = 1$ voor alle $g \in G$. De representatie $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ met $n > 1$ door $\rho(g) = I$ is niet de triviale representatie, maar $t^{\oplus n}$, de n-keer directe som van de triviale representatie.

- Irreducibele representaties: een representatie $\varphi : G \to GL(V)$ heet *irreducibel* als de enige G-invariante deelruimtes van V, $\{0\}$ en V zijn. Elke $\varphi : G \to K^*$ is bijvoorbeeld irreducibel omdat K^1 dimensie 1 heeft, en daardoor geen deelruimtes heeft naast K en $\{0\}$.

- Dus elke graad 1 representatie is irreducibel.

- Als $\varphi : G \to GL(V)$ een representatie is van graad 2, dus $\dim V = 2$, dan is φ reducibel dan en slechts dan als φ_g een gemeenschappelijke eigenvector v hebben voor $g \in G$, of equivalent voor g in een voortbrengende verzameling β voor G.

  Immers dan is er voor alle φ_g een eigenruimte Kv, dus dit is een G-invariante deelruimte onder φ.

- Zo zien we dat $\rho : (12) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(123) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ irreducibel is omdat deze twee matrices eigenruimtes

$$\rho_{(12)} : \mathcal{E}_{-1} = \mathbb{C}e_1,\ \mathcal{E}_1 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Maar e_1 noch $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ zijn eigenvectors van $\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$, dus $\rho_{(12)}$ en $\rho_{(123)}$ delen geen eigenvectoren.

- Als een representatie φ reducibel is en $W \subset V$ de proper G-invariante deelruimte, dan kunnen we deze niet per se als $\varphi^1 \oplus \varphi^2$ schrijven waarbij $\varphi^1(g) = \varphi(g)|_W$ de beperking φ tot W is en φ^2 een andere representatie. De reden is dat er niet perse een G-invariante deelruimte $W_2 \subset V$ hoeft te zijn met $V = W \oplus W_2$.

  Neem bijvoorbeeld $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to GL_2(V)$, $\varphi(1) = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. Dit moet een representatie zijn want evenals 1 heeft $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ oneindige orde, en $\langle 1\rangle = \mathbb{Z}^+$. De representatie is duidelijk reducibel want $\varphi(n) = \begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ heeft steeds eigenvector e_1. Echter als φ een directe som van representaties was, dan moest $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ wel diagonaliseerbaar zijn, i.e. de directe som van twee lineaire afbeeldingen in $\mathbb{C}^*$. Maar deze matrix staat al in Jordan-Normaalvorm en is dus duidelijk niet diagonaliseerbaar.

  Het probleem is dus dat het bestaan van een van $\mathbb{C}e_1$ lineair onafhankelijke G-invariante lineaire deelruimte het bestaan van een tweede lineair onafhankelijke eigenvector zou impliceren.

- Neem r de rotatie bij $\pi/2$, en s de spiegeling in de x-as. Deze brengen samen de diëdergroep D_4 voort. We bekijken de representatie

$$\varphi(r^k) = \begin{pmatrix}i^k&0\\0&(-i)^k\end{pmatrix} \quad \varphi(sr) = \begin{pmatrix}0&(-i)^k\\i^k&0\end{pmatrix}$$

  Dit is inderdaad welgedefinieerd omdat het precies voortkomt uit de specificatie op de voortbrengers, $\varphi(r) = \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$, $\varphi(s) = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ We zien ook dat φ irreducibel is.

- Het doel is om te laten zien dat elke representatie geschreven kan worden als directe som van irreducibele representaties.

- Een representatie $\varphi : G \to GL(V)$ heet *compleet reducibel* als $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ met $V_i \neq 0$ een G-invariante deelruimte is en $\varphi|_{V_i}$ is voor elke $1 \leq i \leq n$ irreducibel.

  Equivalent, $\varphi \sim \bigoplus_{i=1}^n \varphi^{(i)}$ met $\varphi^{(i)}$ irreducibel.

- Een representatie φ heet *decomposable* als $V = V_1 \oplus V_2$ met V_1, V_2 niet-0 G-invariante deelruimtes. Anders heet V *indecomposable*.

  Als $T : V \to V$ een lineaire transformatie is en β een basis dan schrijven we $[T]_\beta$ voor de matrix van T in die basis. voor $\varphi : G \to GL(V)$ decomposable, zij B_1 en B_2 bases voor V_1 en V_2. Dan is $B = B_1 \cup B_2$ juist een basis voor V en er volgt, omdat $\varphi(B_i) \subset V_i$, dat $\varphi|_{V_j}(V_i) = \{0\}$ voor $i \neq j$. In het bijzonder:

$$[\varphi(g)]_B = \begin{pmatrix} [\varphi|_{V_1}(g)]_{B_1} & 0 \\ 0 & [\varphi|_{V_2}(g)]_{B_2} \end{pmatrix}$$

En dus $\varphi = \varphi_{V_1} \oplus \varphi_{V_2}$.

- In het algemeen is de strategie om te bewijzen dat elke φ compleet reducibel is, te bewijzen dat φ ofwel irreducibel is (dan zijn we klaar), ofwel decomposable, en dan een inductieargument op de graad $\dim V$ te gebruiken.

- We moeten eerst laten zien dat de definitie *decomposable* en *irreducibel* alleen afhangen van de representatie modulo equivalentie.

- ***Stelling***: als $\varphi \sim \psi$, en ψ decomposable, dan is φ dat ook.

  Bewijs: Laat T het lineair isomorphisme $V \to W$ zijn zodat $T\varphi_g = \psi_g T$, $\forall g \in G$. Laat W_1, W_2 niet-0 G-invariante deelruimten van W zijn met $W = W_1 \oplus W_2$. Zij $T^{-1}(W_j) = V_j$.

  Ten eerste: $V = V_1 \oplus V_2$, want als $v \in V$ dan $T(v) = w_1 + w_2 \in W_1 \oplus W_2$, dus $v = T^{-1}(w_1) + t^{-1}(w_2)$, dus zij $v_j = T^{-1}(w_j)$. Bovendien zijn $V_1 \cap V_2 = 0$ want $v \in V_1 \cap V_2$ impliceert $T(v) \in W_1 \cap W_2 = 0$, en T is injectief.

  Ten tweede zijn V_1 en V_2 G-invariant, want $v \in V_j$ impliceert $\varphi_g(v) = T\psi_g T^{-1} v$, en $T^{-1}v \in W_j$, W_j is ψ-invariant dus $\psi_g T^{-1} v \in W_j$, en $T\psi_g T^{-1} v \in V_j$ omdat $T(W_j) = V_j$ vanwege bijectiviteit T.

- Evenzo is een φ die equivalent is aan een irreducibele representatie, irreducibel. En een representatie die equivalent is aan een volledig reducibele representatie is volledig reducibel.

3.2

- Op een inproductruimte V is een representatie *unitair* als elke φ_g unitair is, d.w.z. $\langle \varphi_g v, \varphi_g w \rangle = \langle v, w \rangle$ voor elke $v, w, \in V$. Dus $\varphi : G \to U(V)$.

  Als opstapje naar willekeurige eindige representaties, bewijzen we eerst dat unitaire representaties ofwel irreducibel ofwel decomposable zijn. Uiteindelijk willen we dit voor alle representaties van eindige groepen bewijzen.

- ***Lemma***: elke unitaire representatie $\varphi : G \to U(V)$ is ofwel irreducibel ofwel decomposable.

  Bewijs: Laat φ niet irreducibel zijn. Dan is er een niet-0, niet-V G-invariante deelruimte W van V. Bekijk $W^\perp \neq 0$ en $W \oplus W^\perp$. We gaan laten zien dat $W^\perp$ G-invariant is.

  Als $v \in W^\perp$ en $w \in W$ willekeurig, dan is aan te tonen $\langle w, \varphi_g(v) \rangle = 0$. Als volgt:

$$\begin{aligned}\langle w, \varphi_g(v)\rangle &\stackrel{(1)}{=} \langle \varphi_{g^{-1}}(w), v\rangle \\ &\stackrel{(1)}{=} 0\end{aligned}$$

In (1) passen we binnen de haken aan beide zijden $\varphi_{g^{-1}}$ toe onder unitariteit van $\varphi_{g^{-1}}$, en in (2) gebruiken we dat $\varphi_{g^{-1}}(w) \in W$ vanwege W G-invariant.

Er volgt dat $W^\perp$ juist G-invariant is, dus dit geeft de decompositie $W \oplus W^\perp$.

- ***Lemma***: Elke representatie van een eindige groep G is equivalent met een unitaire representatie. Dit deel van de te bewijzen stelling gebruikt strikt noodzakelijk de eindigheid van G.

  Bewijs We gaan uit van een representatie φ op $\mathbb{C}^n$, elke representatie op een n-dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte is namelijk equivalent aan een representatie op $\mathbb{C}^n$ door een basis B voor V te kiezen en φ op die basis te schrijven, i.e. met een isomorfisme $T : V \to \mathbb{C}^n$ die coordinaten neemt ten opzichte van die basis beschouwen we $g \mapsto T^{-1}\varphi_g T$, $G \to GL_n(\mathbb{C})$.

  Nu gebruiken we eindigheid: definieer namelijk

  $$(v, w) = \sum_{g\in G} \langle \varphi_g v, \varphi_g w\rangle$$

  Dit is inderdaad een inproduct; controleer dat $(v, w) \geq 0$, met gelijkheid alleen als $v = w$, $(v, w) = \overline{(w, v)}$, $(v_1 + \lambda v_2, w) = (v_1, w) + \lambda(v_2, w)$.

  We laten nu zien dat deze keuze van inproduct op $\mathbb{C}^n$, de representatie per definite unitair maakt. Namelijk,

  $$\begin{aligned}(\varphi_h v, \varphi_h w) &= \sum_{g\in G} \langle \varphi_g\varphi_g v, \varphi_g\varphi_h w\rangle \\ &= \sum_{g\in G} \langle \varphi_{gh} v, \varphi_{gh} w\rangle \\ &= \sum_{g'\in G} \langle \varphi_{g'} v, \varphi_{g'} w\rangle \\ &= (v, w)\end{aligned}$$

- ***Corrolarium*** Elke representatie van een eindige groep is ofwel decomposable ofwel irreducibel

  Bewijs: Zij φ een representatie van de eindige groep G. Wegens het tweede lemma is φ equivalent met een unitaire representatie ψ op $\mathbb{C}^n$. Voor

ψ, unitair, weten we wegens het eerste lemma dat ψ ofwel decomposable ofwel irreducibel is. Wanneer ψ decomposable is, is φ dat ook (want deze eigenschap draagt over onder equivalentie), en idem voor het geval dat ψ irreducibel is. Dus φ is ofwel decomposable ofwel irreducibel.

- ***Stelling***: (Maschke) Elke representatie van een eindige groep is volledig decomposeerbaar.

  Bewijs Met inductie naar de graad $n = \dim V$. Als $n = 1$, dan is φ triviaal irreducibel omdat een 1-dimensionale vectorruimte geen eigenlijke deelruimten heeft. Als het geldt voor alle representaties van graad $m < n$, laat dat φ een representatie van eindige groep G van graad n zijn. Als φ irreducibel is, zijn we klaar. Anders is φ decomposabel wegens het voorgaande, zeg $\varphi = \varphi^{(1)} \oplus \varphi^{(2)}$. Met $\varphi^{(j)}$ representaties van graad $< n$. Met de inductiehypothese kunnen we deze volledig reduceren tot, zeg

  $$\varphi^{(1)} = \bigoplus_{j=1}^{m_1} \varphi^{(1)(j)} \quad \varphi^{(2)} = \bigoplus_{j=1}^{m_2} \varphi^{(2)(j)}$$

  Er volgt $\varphi = \bigoplus_{j=1}^{2} \bigoplus_{k=1}^{m_j} \varphi^{(j)(k)}$, en elke $\varphi^{(j)(k)}$ is irreducibel, dus φ is volledig reducibel.

4.1

- Een *homomorfisme van φ naar ρ*, waar $\varphi : G \to GL(V)$, $\rho : G \to GL(W)$ representaties zijn, is en lineaire afbeelding $T : V \to W$ met $T\varphi_g = \rho_g T$ voor alle $g \in G$. De verzameling van alle homomorfismes van φ naar ρ heet $\hom_G(\varphi, \rho)$. Merk op $\hom_G(\varphi, \rho) \subset \hom(V, W)$.

- Als $\varphi \sim \rho$ dan is er een $T \in \hom_G(\varphi, \rho)$ die inverteerbaar is (een lineair isomorfisme). T hoeft in het algemeen geen isomorfisme te zijn. $\hom_G(\varphi, \rho)$ bevat bijvoorbeeld altijd de 0-afbeelding $v \mapsto 0$.

- $T : V \to V$ behoort tot $\hom_G(\varphi, \varphi)$ d.e.s.d.a. $T\varphi_g = \varphi_g T$ voor alle $g \in G$, dus T commuteert met elementen in $\varphi(G) \subset GL(V)$.

- ***Propositie***: $T : V \to W$ in $\hom_G(\varphi, \rho)$. Dan is $\ker T$ een G-invariante deelruimte van V en $\operatorname{Im} T$ een G-invariante deelruimte van W.

  Bewijs: Laat $v \in \ker T$, $g \in G$. Dan $T\varphi_g v = \rho_g T v = \rho_g 0 = 0$, dus $\varphi_g v \in \ker T$.

  Laat $w \operatorname{Im} T$, $g \in G$. Dan $w = Tv$, $v \in V$, dus $\rho_g w = \rho_g T v = T\varphi_g v$, dus $\rho_g w \in \operatorname{Im} T$.

- ***Propositie*** $\hom_G(\varphi, \rho)$ is niet alleen een deelverzameling, maar een lineaire deelruimte van $\hom(V, W)$.

Bewijs $T_1, T_2 \in \hom_G(\varphi, \rho)$ en $\lambda \in \mathbb{C}$. Dan

$$(T_1 + \lambda T_2)\varphi_g = T_1\varphi_g + \lambda T_2\varphi_g = \rho_g T_1 + \lambda\rho_g T_2 = \rho_g(T_1 + \lambda T_2)$$

Dus $T_1 + \lambda T_2 \in \hom_G(\varphi, \rho)$.

- Een belangrijk resultaat is dat de homomorfismes tussen irreducibele representaties beperkt zijn.

  Lemma: (Schur's Lemma) Zij φ, ρ irreducibele representaties, $T \in \hom_G(\varphi, \rho)$. Dan is T inverteerbaar (i.e. een equivalentie) of $T = 0$. Met als gevolg:

  (i) Als $\varphi \not\sim \rho$, $\hom_G(\varphi, \rho) = 0$.

  (ii) Als $\varphi = \rho$, dan $T = \lambda I$ met $\lambda \in \mathbb{C}$.

  Bewijs Zij $T \in \hom_G(\varphi, \rho)$. Neem aan $T \neq 0$. $\ker T$ is een G-invariante deelruimte van V. φ is irreducibel, dus deze deelruimte is ofwel V, ofwel 0. V kan niet want $T \neq 0$. Dus T is injectief. $\operatorname{Im} T$ is een G-invariante deelruimte van W. ρ is irreducibel, dus deze deelruimte is ofwel W ofwel 0. Triviaal kan niet want $T \neq 0$. Dus T is surjectief. We concluderen dat T bijectief is, dus een lineair isomorfisme.

  Voor (i) merken we op dat $\hom_G(\varphi, \rho)$ alleen equivalenties en 0 bevat, maar $\rho \not\sim \varphi$, dus geen equivalenties.

  Voor (ii), neem λ een eigenwaarde van T. Dan is $\lambda I - T$ niet inverteerbaar, en wegens $I \in \hom_G(\varphi, \varphi)$ volgt $I - \lambda T \in \hom_G(\varphi, \varphi)$. Omdat niet-inverteerbare elementen van $\hom_G(\varphi, \varphi)$ de 0-afbeelding moeten zijn, volgt $T = \lambda I$.

- ***Corrolarium***: $\varphi \sim \rho$, dan $\dim \hom_G(\varphi, \rho) = 1$

  Bewijs Zij $S : V \to W$ de equivalentie $S\varphi_g = \rho_g S$, $\forall g \in G$.

  Als $T \in \hom_G(\varphi, \rho)$, dan $T\varphi_g = \rho_g T = S\varphi_g S^{-1} T$, dus $S^{-1}T\varphi_g = \varphi_g S^{-1} T$, dus $S^{-1}T \in \hom_G(\varphi, \varphi)$ en er volgt $S^{-1}T = \lambda I$, dus $T = \lambda S$.

  S spant $\hom_G(\varphi, \rho)$ dus op.

- ***Corrolarium*** Zij G abels. Dan is elke irreducibele representatie van G van graad 1.

  Bewijs Laat φ een irreducibele representatie van G zijn. We laten zien dat φ_h voor $h \in G$, een equivalentie is.

  $\varphi_h\varphi_g = \varphi_{hg} = \varphi_{gh} = \varphi_g\varphi_h$

  Dus $\varphi_h \in \hom_G(\varphi, \varphi)$, waardoor $\varphi_h = \lambda_h I$ voor een $\lambda_h \in \mathbb{C}^*$ (niet 0 want $\varphi : G \to GL(V)$. Zij $v \in V$ willekeurig. $\lambda_h I$ heeft eigenruimte $\mathbb{C}v$ voor elke $h \in G$, een propere G-invariante deelruimte tenzij $V = \mathbb{C}v$; we concluderen $V = \mathbb{C}v$ dus $\dim V = 1$.

- ***Corrolarium*** Als G een eindige abelse groep is en $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ een representatie, dan is φ equivalent aan een representatie $\rho \bigoplus_{k=1}^{m} \varphi^{(k)}$, waar elke $\varphi^{(k)}$ irreducibel is. Omdat G abels is, heeft elke $\varphi^{(k)}$ graad 1 en dus $\varphi_g^{(k)} \in \mathbb{C}^*$, $\forall g \in G$, dus ook $n = m$. Zij T de equivalentie $T^{-1}\varphi_g T = \rho$, dan is $T^{-1}\varphi_g T$ na schrijven op een basis een diagonaalmatrix

$$T^{-1}\varphi_g T = \mathrm{diag}(\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(n)})$$

- ***Corrolarium*** $A \in GL_m(\mathbb{C})$ matrix van eindige orde, $A^n = I$. Dan is A diagonaliseerbaar. De eigenwaarden van A zijn n-demachts eenheidswortels (niet noodzakelijk primitief).

  Bewijs Neem representatie $\varphi : \mathbb{Z}_n \to GL_m(\mathbb{C})$ door $\overline{k} \mapsto A^k$. Welgedefinieerd want $A^n = I$. $\mathbb{Z}_n$ is abels, dus zij $T \in CL_m(\mathbb{C})$ met $\mathrm{diag}(\omega_1, ..., \omega_m) = T^{-1}A^kT$ diagonaal, $\forall \overline{k} \in \mathbb{Z}_n$. A is dus diagonaliseerbaar. Bovendien is $\mathrm{diag}(\omega_1^n, ..., \omega_n^n) = \mathrm{diag}(\omega_1, ..., \omega)^n = T^{-1}A^nT = I$, dus blijkbaar is $\omega_k^n = 1$ voor $k = 1, ..., n$. De eigenwaarden zijn dus n-demachts eenheidswortels.

4.2

- Zij G een groep en definieer

$$L(G) = \mathbb{C}^G = \{f : G \to \mathbb{C}\}$$

  Dan is $L(G)$ een lineaire ruimte onder puntsgewijze optelling en scalairvermenigvuldiging

$$(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$$
$$(cf)(g) = c \cdot f(g)$$

  En een inproductruimte met inproduct

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g)$$

  Dit is een $|G|$-dimensionale vectorruimte met basis $\{\chi_g\}_{g \in G}$, bijvoorbeeld.

  We noemen $L(G)$ de *groepsalgebra* van G.

- We willen naar het volgende resultaat toe werken:

  Stelling (Schur's orthogonaliteitsrelaties) Zij $\varphi : G \to U_n(\mathbb{C})$ en $\rho : G \to U_m(\mathbb{C})$ inequivalente irreducibele unitaire representaties. Schrijf φ_{kl} voor het matrixelement in de k-de rij en l-de kolom van φ. Dan

  (i) $\langle \rho_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = 0$;

  (ii) $\langle \varphi_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = \begin{cases} 1/n & i = k,\ j = l \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

Begrijp dat we bedoelen, dat we het inproduct in $L(G)$ nemen: $\rho_{kl} : g \mapsto [\rho_g]_{lk}$, de lk-de entry van ρ_g, dus ρ_{lk} heeft type $G \to \mathbb{C}$.

We doen dit via een paar lemmatische resultaten.

- ***Propositie*** $\varphi : G \to GL(V)$, $\rho : G \to GL(W)$ representaties en $T : V \to W$ lineaire transformatie. Definieer $T^{\#} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_g : V \to W$. Dan

  (i) $T^{\#} \in \hom_G(\varphi, \rho)$;

  (ii) Als $T \in \hom_G(\varphi, \rho)$, dan $T^{\#} = T$;

  (iii) $P : T \mapsto T^{\#}$ is lineair en surjectief $\hom_G(V, W) \to \hom_G(\varphi, \rho)$.

  Bewijs

  (i)

$$
\begin{aligned}
T^{\#}\varphi_h &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_g \varphi_h \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_{gh} \\
&\overline{(1)}= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_{gh} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} \rho_{h^{-1} f} T \varphi_f \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} \rho_{h^{-1}} \rho_f T \varphi_f \qquad = \rho_{h^{-1}} \circ \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} \rho_f T \varphi_f \\
&= \rho_{h^{-1}} T^{\#}
\end{aligned}
$$

  In (1) passen we een variabeleverandering $f = gh$ toe, dus $g^{-1} = hh^{-1}g = hf^{-1}$. Dit is valide want linksvermenigvuldiging permuteert slechts de elementen van G, dus de sommatie is over dezelfde elementen (*averaging trick*).

  (ii) Hier is het noodzakelijk dat we in de definitie delen door $|G|$. Want:

$$
\begin{aligned}
T^{\#} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_g \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} \rho_g T \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} T \qquad = T
\end{aligned}
$$

  In (1) passen we toe dat $T\varphi_g = \rho_g T$.

(iii) P is surjectief omdat elke $T \in \hom_g(\varphi, \rho)$ heeft $P(T) = T$. P is lineair omdat de sommatie dit is; voor $\lambda \in \mathbb{C}$, $T_1, T_2 \in \hom(V, W)$ geldt

$$\begin{aligned} P(T_1 + \lambda T_2) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} (T_1 + \lambda T_2) \varphi_g \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} [\rho_{g^{-1}} T_1 \varphi_g + \lambda \rho_{g^{-1}} T_2 \varphi_g] \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T_1 \varphi_g + \lambda \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T_2 \varphi_g \\ &= P(T_1) + \lambda P(T_2) \end{aligned}$$

- ***Propositie*** Zij $\varphi : G \to GL(V)$, $\rho : G \to GL(W)$ irreducibele representaties van G en zij $T : V \to W$ lineair homomorfisme. Dan

  (i) Als $\varphi \not\sim \rho$, dan $T^\# = 0$;

  (ii) Als $\varphi = \rho$, dan $T^\# = \frac{\operatorname{Tr} T}{\deg \varphi} I$

  Bewijs

  (i) Als $\varphi \not\sim \rho$, dan $\hom_G(\varphi, \rho) = 0$ wegens Schur's lemma, dus $T^\# = 0$ is de enige mogelijkheid.

  (ii) Als $\varphi = \rho$, dan $T = \lambda I$ voor een zekere $\lambda \in \mathbb{C}$ wegens Schur's lemma. Enerzijds $\operatorname{Tr}(T^\#) = \operatorname{Tr}(\lambda I) = \lambda \deg \varphi$. Dus $T^\# = \frac{\operatorname{Tr} T^\#}{\deg \varphi} I$. Anderzijds

  $$\begin{aligned} \operatorname{Tr} T^\# &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{Tr}(\varphi_{g^{-1}} T \varphi_g) \\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{Tr}(\varphi_{g^{-1}} \varphi_g T) \\ &= \operatorname{Tr} T \end{aligned}$$

  In (1) gebruiken we $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ met $A = \varphi_{g^{-1}}$, $B = T\varphi_g$. Er volgt $T^\# \frac{\operatorname{Tr} T}{\deg \varphi} I$.

- Als $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ en $\rho : G \to GL_m(\mathbb{C})$ representaties zijn dan $\hom(V, W) = M_{mn}(\mathbb{C})$, de set van $m \times n$-matrices over $\mathbb{C}$, en $\hom_G(\varphi, \rho)$ is een deelruimte hiervan. P uit het voorgaande is dus een map van $M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C})$.

  De standaardbasis voor $M_{mn}(\mathbb{C})$ is $\{E_{ij}\}_{i \in [m], j \in [n]}$, waar E_{ij} de matrix is met 1 in positie ij en 0 overal anders (ook wel $[E_{ij}]_{xy} = \delta_{ix} \delta_{jy}$. We schrijven voor een matrix $A = (a_{ij}) = \sum_{ij} a_{ij} E_{ij}$.

Lemma Voor $A \in M_{rm}(\mathbb{C})$, $B \in M_{ns}(\mathbb{C})$ en E_{ki} zoals boven, gelegen in $M_{mn}(\mathbb{C})$. Dan $[AE_{ki}B]_{lj} = a_{lk}b_{ij}$.

Bewijs

$$[AE_{ki}B]_{lj} = \sum_x A_{lx}[E_{ki}B]_{xj} = \sum_x A_{lx} \sum_y [E_{ki}]_{xy} B_{yj} = \sum_{x,y} A_{lx}\delta_{kx}\delta_{iy}B_{yj} = a_{lk}b_{ij}$$

- ***Lemma*** $\varphi : G \to U_n(\mathbb{C})$, $\rho : G \to U_m(\mathbb{C})$ unitaire representaties, $A = E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Dan $A^{\#}_{ij} = \langle \rho_{kl}, \varphi_{ij} \rangle$

  Bewijs ρ is unitair, dus $\rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1} = \rho_g^*$, de Hermitisch geconjugeerde. In het bijzonder is $\rho_{lk}(g^{-1}) = \overline{\rho_{lk}(g)}$.

$$\begin{aligned} A^{\#}_{lj} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}[\rho_{g^{-1}}E_{ki}\varphi_g]_{lj} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{lk}(g^{-1})\varphi_{ij}(g) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\rho_{lk}(g)}\varphi_{ij}(g) \\ &= \langle \rho_{kl}, \varphi_{ij} \rangle \end{aligned}$$

- We kunnen $P : M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C})$ door $P(T) = T^{\#}$, welke een lineaire afbeelding is, een matrix B geven, welke een $mn \times mn$ matrix is met rijen en kolommen geindexeerd door paren lj, ki, $1 \le l, k \le m$, $1 \le j, i \le n$. Het voorgaande lemma zegt dan dat de lj, ki-de entry van B precies $\langle \rho_{kl}, \varphi_{ij} \rangle$ is.

- ***Stelling*** (Schur's orthogonaliteitsrelaties) Zij $\varphi : G \to U_n(\mathbb{C})$ en $\rho : G \to U_m(\mathbb{C})$ inequivalente irreducibele unitaire representaties. Schrijf φ_{kl} voor het matrixelement in de k-de rij en l-de kolom van φ. Dan

  (i) $\langle \rho_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = 0$;

  (ii) $\langle \varphi_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = \begin{cases} 1/n & i = k,\ j = l \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

  Bewijs

  (i) Definieer $A = E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$ en $A^{\#}$ voor φ naar ρ zoals in het voorgaande. Dan $A^{\#} = 0$ wegens het eerdere lemma, want $\varphi \not\sim \rho$. Maar dan $A^{\#}_{lj} = 0$, dus $\langle \rho_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = 0$ voor alle $1 \le l, k \le m$, $1 \le j, i \le n$.

(ii) Definieer $A = E_{ki} \in M_{nn}$ en $A^{\#}$ voor φ naar φ zoals in het voorgaande. Dan
$$A^{\#} = \frac{\operatorname{Tr} E_{ki}}{n} I$$
Dus als $i \neq k$ dan heeft E_{ki} alleen 0-en op de diagonaal en is $A^{\#} = 0$, dus $\langle \varphi_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = (A^{\#})_{lj} = 0$.
Als $j \neq l$ dan is $I_{lj} = 0$ dus $\langle \varphi_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = (A^{\#})_{lj} = \frac{\delta_{ki}}{n} I_{lj} = 0$.
Als $j = l$ en $i = k$ dan is $\langle \varphi_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = (A^{\#})_{lj} = \frac{1}{n} I_{jj} = \frac{1}{n}$.

- Een gevolg voor $L(G)$ is:

  Corrolarium: Zij φ een *irreducibele* en *unitaire* representatie van G van graad d. Dan vormen de d^2 functies $\{\sqrt{d}\varphi_{ij} : G \to \mathbb{C} \mid i, j \in [d]\}$ een orthonormale set.

  Bewijs Dit is gewoon de voorgaande stelling, maar alle functies hebben een renormalisatie met factor $\sqrt{d}$ gekregen:
$$\langle \sqrt{d}\varphi_{kl}, \sqrt{d}\varphi_{ij} \rangle = \begin{cases} d/d = 1 & i = k,\ j = l \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

- Een belangrijk gevolg is dat er slechts eindig veel equivalentieklassen van irreducibele representaties van G zijn, want:

  Elke equivalentieklasse bevat een unitaire representatie.

  $\dim(L(G)) = |G|$ dus geen enkele lineair onafhankelijke verzameling kan meer dan $|G|$ elementen bevatten.

  Wegens stelling 3.2.8 volgt, waneer $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ inequivalente irreducibele representaties zijn van graad $d_1, ..., d_s$, dat de set
$$\bigcup_{k=1}^{s} \{\sqrt{d}_k \varphi_{ij}^{(k)} : G \to \mathbb{C} \mid i, j \in [d_k]\}$$
  Orthonormaal, dus lineair onafhankelijk moet zijn. Er volgt $s \leq \sum_{k=1}^{s} d_k^2 \leq |G|$ dus in het bijzonder zijn er hooguit s equivalentieklassen van irreducibele representaties.

  Propositie: Zij G een eindige groep en zij $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ een representantensysteem van alle equivalentieklassen van eindige representaties, met elke $\varphi^{(k)}$ van eindige graad $d_k s$. Dan is de set
$$\{\sqrt{d}_k \varphi_{ij}^{(k)} : G \to \mathbb{C} \mid 1 \leq i, j \leq d_k\}$$
  Orthonormaal, dus lineair onafhankelijk in : (G) en in het bijzonder $s \leq \sum_{k=1}^{s} d_k^2 \leq |G|$
  Met wat extra theorie blijkt dat de tweede ongelijkheid een *gelijkheid* is; We weten ook dat $s = \sum_{k=1}^{s} d_k$ voor abelse groepen omdat irreducibele representaties van abelse groepen altijd graad $d_k = 1$ hebben. De eerste gelijkheid geldt dus voor abelse groepen. De omkering blijkt ook waar: als alle irreducibele representaties graad 1 hebben, dan is de groep abels.

4.3

- Zij $\varphi : G \to GL(V)$ een representatie. $\chi_\varphi : G \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\chi_\varphi(g) = \mathrm{Tr}(\varphi(g))$ heet het *karakter* van de representatie.

  Een karakter van een irreducibele representatie heet een *irreducibel karakter*.

  Merk op dat $\chi_\varphi \in L(G)$

- ***Eigenschap*** Voor φ graad 1 is $\chi_\varphi = \varphi$.

- ***Eigenschap*** $\chi\varphi(1) = \mathrm{Tr}\, I = \deg \varphi$

- ***Eigenschap*** Als $\varphi \sim \rho$, dan $\chi_\rho = \chi_\varphi$

  Bewijs Tr is onafhankelijk van basiskeuze en $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, dus

  $$\chi_\varphi(g) = \mathrm{Tr}(\varphi(g)) = \mathrm{Tr}(S^{-1}\rho(g)S) = \mathrm{Tr}(SS^{-1}\rho(g)) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$$

- ***Eigenschap*** Voor alle $g, h \in G$, $\chi_\varphi(hgh^{-1}) = \chi_\varphi(g)$

  Bewijs:

  $$\chi_\varphi(hgh^{-1}) = \mathrm{Tr}(\varphi(h)\varphi(g)\varphi(h^{-1})) = \mathrm{Tr}(\varphi(h)\varphi(h^{-1})\varphi(g)) = \mathrm{Tr}(\varphi(g))$$

- Een *klasse-functie* is een functie $f : G \to \mathbb{C}$ met $f(g) = f(hgh^{-1})$ voor alle $g, h \in G$, of equivalent, als f constant is op alle conjugatieklassen van G.

  Men noteert de ruimte van klassefuncties als $Z(L(G))$, wat suggesteert dat het het centrum van een ring is, en dit is inderdaad het geval.

- Twee elementen $a.b \in G$ heten *geconjugeerd* als er een $h \in G$ bestaat met $a = h^{-1}bh$. Dit is een equivalentierelatie. De *conjugatieklassen* van G zijn de verzamelingen $\mathrm{Cl}(a) = \{hah^{-1} \mid h \in G\}$.

  Zo'n conjugatieklasse is geen ondergroep van G tenzij $1 \in \mathrm{Cl}(a)$, maar $\mathrm{Cl}(1) = \{1\}$.

  We noteren $\mathrm{Cl}(G)$ voor de partitie van G in conjugatieklassen.

- ***Propositie*** $Z(L(G))$ is een lineaire deelruimte van $L(G)$.

  Bewijs Zij $f_1, f_2 \in Z(L(G))$ en $\lambda \in \mathbb{C}$. Dan

  $$(f_1+\lambda f_2)(hgh^{-1}) = f_1(hgh^{-1})+\lambda\cdot f_2(hgh^{-1}) = f_1(g)+\lambda\cdot f_2(g) = (f_1+\lambda f_2)(g)$$

- Definieer $\chi_C : G \to \mathbb{C}$ voor $C \subset \mathrm{Cl}(G)$ als de indicator functie voor de verzameling $C \subset G$.

  Propositie $B = \{\chi_C \mid C \in \mathrm{Cl}(G)\}$ is een basis voor $Z(L(G))$, dus $\dim(Z(L(G))) = |\,\mathrm{Cl}(G)|$.

Bewijs χ_C is constant op de conjugatieklassen, namelijk 1 op C en 0 overal anders. Dus $\chi_C \in Z(L(G))$.

B spant $Z(L(G))$ op want $f = \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} f(C)\chi_C$ voor een f die constant is op elke C.

Verder is B orthogonaal met betrekking tot het op $L(G)$ gedefinieerde inproduct: $1/|G| \sum_{g \in G} \overline{\chi_C(g)}\chi_D(g) = \delta_{CD}\frac{|C|}{|G|}$

- ***Stelling*** (Eerste orthonogonaliteitsrelaties) Zij φ, ρ irreducibele representaties van G. Dan

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1 & \varphi \sim \rho \\ 0 & \varphi \not\sim \rho \end{cases}$$

Bewijs Omdat $\chi_\varphi = \chi_\psi$ als $\varphi \sim \psi$, kunnen we φ z.v.v.a. unitair nemen en van type $G \to U_n(\mathbb{C})$, en $\rho : G \to U_m(\mathbb{C})$.

Vervolgens:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\varphi(g)}\chi_\rho(g) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\mathrm{Tr}(\varphi(g))}\,\mathrm{Tr}(\rho(g)) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{n} \overline{(\varphi_{ii}(g))} \sum_{j=1}^{m} \rho_{jj}(g) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{(\varphi_{ii}(g))}\rho_{jj}(g) \qquad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_{ii}, \rho_{jj} \rangle
\end{aligned}$$

Als $\varphi \not\sim \rho$ dan is elke $\langle \varphi_{ii}, \rho_{jj} \rangle = 0$ wegens Schur's lemma.

Als $\varphi \sim \rho$ dan volgt $\chi_\varphi = \chi_\rho$ dus kunnen we z.v.v.a. aannemen $\varphi = \rho$ en concluderen

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_{ii}, \varphi_{jj} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_{ii}, \varphi_{ii} \rangle = n/n = 1$$

- ***Corrolarium*** Er zijn hoogstens $|\mathrm{Cl}(G)|$ equivalentieklassen van irreducibele representaties van G.

Bewijs We weten al dat er een eindig aantal equivalentieklassen zijn, zeg met unitaire representanten $\varphi^{(k)}$ voor $k \in [s]$.

$Z(L(G))$ bevat een orhonormale set van irreducibele karakters

$$\{\chi_{\varphi^{(k)}} \mid 1 \leq k \leq s\}$$

Waarin $\{\varphi^{(k)}\}_{1\leq k\leq s}$ een unitair representantensysteem is voor de equivalentieklassen van eindige representaties op G. Deze set is orthonormaal wegens het voorgaande en bevat dus minder dan $\dim Z(L(G)) = |\operatorname{Cl}(G)|$ elementen.

- Notatie: als V een vectorruimte is en φ een representatie, $m > 0$ geheel, noteer dan

$$mV = \underbrace{V \oplus ... \oplus V}_{\times m} \quad m\varphi = \underbrace{\varphi \oplus ... \oplus \varphi}_{\times m}$$

- Als $\rho \sim \bigoplus_{k=1}^{s} m_1 \varphi^{(k)}$, waarin we eisen dat de $\varphi^{(k)}$ paarsgewijs inequivalent zijn, en $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ een complete set van irreducibele representaties is (dus een representantensysteem van de equivalentieklassen van irreducibele representaties), dan noemen we $m_k \geq$ de *multipliciteit* van $\varphi^{(k)}$ in ρ. Als $m_k > 0$ dan heet $\varphi^{(k)}$ een *irreducibel constituent* van ρ.

- Als $\rho \sim m_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus m_s\varphi^{(s)}$, dan $\deg\rho = \sum_{k=1}^{s} m_k d_k$

- ***Opmerking*** In H.3 hebben we bereikt dat zo'n ontbinding in irreducibele representaties bestaat. Door het kiezen van geschikte equivalenties $nI \oplus T \oplus (s-n-1)I$ kunnen we er ook voor zorgen dat deze $\varphi^{(k)}$ elk een eigen equivalentieklasse van irreducibele representaties representeren, en unitair zijn.

  Het is nog niet bekend dat deze ontbinding uniek is, en daarmee weten we nog niet of m_k een door enkel ρ uniek bepaald getal is.

  Om te kunenn laten zien dat m_k uniek is, laten we zien hoe deze te berekenen s gegeven $\varphi^{(k)}$ en ρ. Daarmee stellen we vast dat de decompositie van ρ in irreducibele constituenten wel uniek moet zijn, op equivalenties van $\varphi^{(k)}$ na.

  Die uitspraak lijkt erg op het bestaan van een unieke priemontbinding in een UFD, op units na.

- Hiertoe bewijzen we eerst een lemma:

  Lemma: zij $\rho = \varphi \oplus \psi$, dan $\chi_\rho = \chi_\varphi + \chi_\psi$.

  Bewijs Neem op equivalentie na aan (z.v.v.a. want χ_φ is invariant onder equivalentie van φ) dat $\rho : G \to GL_{n+m}(\mathbb{C})$, $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ en $\psi : G \to GL_m(\mathbb{C})$ en dus dat ρ een blokmatrix is:

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \varphi(g) & 0 \\ 0 & \psi(g) \end{pmatrix}$$

  Er volgt $\operatorname{Tr}(\rho(g)) = \operatorname{Tr}(\varphi(g)) + \operatorname{Tr}(\psi(g))$.

- ***Stelling*** zij $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ een complete verzameling representanten van de equivalentieklassen van irreducibele representaties van G en laat

$$\rho \sim m_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus m_s\varphi^{(s)}$$

Dan $m_k = \langle \chi_{\varphi^{(k)}}, \chi_\rho \rangle$.

Als gevolg is de decompositie van ρ in irreducibele constituenten uniek modulo equivalentie van de constituenten met hun klasse en ρ is modulo equivalentie te ontbinden middels haar karakter χ_ρ.

Bewijs Wegens het lemma

$$\chi_\rho = \sum_{k=1}^{s} m_k \chi_{\varphi^{(k)}}$$

Bovendien zijn de $\chi_{\varphi^{(k)}}$ een orthonormale set in $Z(L(G))$, dus

$$\langle \chi_{\varphi^{(k)}} \chi_\rho \rangle = \sum_{k=1}^{s} m_1 \langle \chi_{\varphi^{(k)}} \chi_{\varphi^{(k)}} \rangle = m_k$$

- ***Corrolarium*** Een representatie is irreducibel dan en slechts dan als $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$

  Bewijs Schrijf $\rho \sim= \sum_{k=1}^{s} m_k \varphi^{(k)}$. Wegens orthonormaliteit $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = m_1^2 + ... + m_s^2$. ρ is irreducibel d.e.s.d.a. ρ indecomposable is, d.e.s.d.a. $m_k = 1$ voor precies één k en $m_j = 0$ voor $j \neq k$. En dit gebeurt precies wanneer $m_1 + ... + m_s = 1$.

- Beschouw nogmaals de representaties φ en $\rho \oplus \psi$ voor S_3. φ stuurt een permutatie naar zijn permutatiematrix P_σ, en $\rho \oplus \psi$ is gedefinieerd op de generatoren als:

  $$(\rho \oplus \psi)_{(12)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\rho \oplus \psi)_{(123)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  We kunnen nu eenvoudig aantonen dat ρ irreducibel is door χ_ρ te bekijken: $\chi_\rho((12)) = 0$, $\chi_\rho(\mathrm{id}) = 2$, $\chi_\rho((123)) = -1$. Er zijn 3 verwisselingen en 2 3-cykels, daardoor

  $$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{6}(2^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^2) = 1$$

  Dus ρ is irreducibel.

- Wat zijn de irreducibele representaties van S_3? Er zijn drie conjugatieklassen in S_3, namelijk $\mathrm{Cl}(\mathrm{id})$, $\mathrm{Cl}((12)) = \{(12), (13), (23)\}$ en $\mathrm{Cl}((123)) = \{(123), (132)\}$. Dit zien we in doordat id altijd een eigen klasse heeft, en de 2-cykels en 3-cykels niet geconjugeerd kunnen zijn omdat ze verschillend teken hebben, en conjugatie behoudt het teken. $Z(L(G))$ heef dus dimensie 3, wat betekent dat we hooguit 3 irreducibele karakters kunnen vinden. In het voorgaande vonden we al de triviale representatie 1 en ρ. voor de laatste representatie merken we twee dingen op:

1. Als er nog een irreducibele inequivalente representatie ψ is met graad d, dan $1^2 + d^2 + 2^2 \leq |S_3| = 6$, dus $d = 1$. Dat betekent dat $\chi_\psi = \psi$.
2. De tekenfunctie

$$\epsilon : \sigma \mapsto \begin{cases} 1 & \sigma \text{ even} \\ -1 & \sigma \text{ oneven} \end{cases}$$

is een homomorfisme dat ook een klassenfunctie is (conjugatie bewaart het teken).

Samen geeft dit dat $\psi = \chi_\psi = \epsilon$ een representatie is, en we hebben ze daarmee allemaal gevonden.

4.4

- We gaan nu een representatie bouwen die de gelijkheid $\sum_{k=1}^{s} d_k^2 = |G|$ definitief vaststelt.
- Voor X een eindige verzameling kunnen we X tot $\mathbb{C}$-basis van de volgende synthetische vectorruimte maken:

$$\mathbb{C}X = \{\sum_{x \in X} c_x x \mid c_x \in \mathbb{C}\}$$

Waarbij we optelling en scalairvermenigvuldiging puntsgewijs definiëren: $c(\sum_{x\in X} c_x x) = \sum_{x\in X} c c_x x$, $(\sum_{x\in X} a_x x)(\sum_{x\in X} b_x x) = \sum_{x\in X}(a_x + b_x)x$
Dit wordt een inproductruimte met X een orthonormale basis onder

$$\langle \sum_{x\in X} a_x x, \sum_{x\in X} b_x x\rangle = \sum_{x\in X} \overline{a_x} b_x$$

De *reguliere representatie* van een eindige groep G is $L : G \to GL(\mathbb{C}G)$ door

$$L_g(\sum_{h\in G} c_h h) = \sum_{h\in G} c_h gh = \sum_{x\in G} c_{g^{-1}x} x$$

d.w.z. L_g is gedefinieerd op de basis G van $\mathbb{C}G$ door $L_g h = gh$

Dit is duidelijk lineair, en verder $L_{gh}x = (gh)x = g(hx) = L_g L_h x$ voor elke $x \in G$, dus $L_{gh} = L_g L_h$ op $\mathbb{C}G$. Dus L is een homomorfisme en dus een representatie.

- ***Propositie*** De reguliere representatie is unitair.

  Bewijs Voor $x, y \in G$:

$$\langle L_g x, L_g y\rangle = \langle gx, gy\rangle = \delta_{(gx),(gy)} = \delta_{x,y}$$

Waar de laatste gelijkheid volgt omdat linksvermenigvuldiging met g op bijectief is $G \to G$.

- ***Propositie*** Het karakter van L:

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & g = 1 \\ 0 & g \neq 1 \end{cases}$$

Bewijs

Zij $G = \{g_1, ..., g_n\}$, als geordende basis voor $\mathbb{C}G$, $n = |G|$. Dan

$$\begin{aligned} [L_g]_{ij} &= \begin{cases} 1 & g_i = gg_j \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & g = g_i g_j^{-1} \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \end{aligned}$$

In het bijzonder $[L_g]_{ii} = \delta_{g,1}$. Dus $\chi_L(g) = \mathrm{Tr}(L_g) = |G|\delta_{g,1}$

- Nu gaan we L ontbinden in irreducibele termen. Zij $\{\varphi^{(k)}\}_{1\leq k\leq s}$ een complete set van inequivalente unitaire representaties voor G, $d_k = \deg \varphi^{(k)}$

Stelling We hebben de decompositie

$$L \sim d_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus d_s\varphi^{(s)}$$

Bewijs

$$\begin{aligned} m_k &= \langle \chi_k, \chi_L\rangle \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_k(g)}\chi_L(g) \\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{|G|}\overline{\chi_k(1)}|G| \\ &= \deg \varphi^{(k)} \\ &= d_k \end{aligned}$$

Waarbij we in (1) de propositie $\chi_L(g) = \delta_{g,1}|G|$ gebruiken, en vervolgens $\chi_\rho(1) = \deg \rho$.

- We hadden al $|G| \geq \sum_{k=1}^{s} d_k^2$. Dit kunnen we nu scherper maken.

Corrolarium We hebben $|G| = \sum_{k=1}^{s} d_k^2$.

Bewijs We hebben $\chi_L = d_1\chi_1 + ... + d_s\chi_s$ wegens $L \sim d_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus d_s\varphi^{(s)}$, en evalueren we dit karakter in 1 dan geeft dat

$$|G| = \deg L = \chi_L(1) = d_1\chi_1(1) + ... + d_s\chi_s(1) = d_1^2 + ... + d_s^2$$

- ***Stelling*** De verzameling $B = \{\sqrt{d_k}\varphi_{ij}^{(k)} : 1 \leq k \leq s, 1 \leq i, j \leq d_k\}$ is een orthonormale basis voor $L(G)$.

  Bewijs Schur's orthogonaliteitsrelaties gaven al dat B orthonormaal, dus lineair onafhankelijk is. Omdat $|B| = \sum_{i=1}^{s} d_i = |G| = \dim(L(G))$ wegens de voorgaande stelling, volgt dat B ook $L(G)$ opspant en dus een basis is.

- Voor de lineaire deelruimte $Z(L(G))$ hebben we als basis juist $\chi_1, ..., \chi_s$

  Stelling $\{\chi_i \mid 1 \leq i \leq s\}$ vormt een orthonormale basis voor $Z(L(G))$.

  Bewijs We weten al dat elk karakter, dus i.h.b. elk irreducibel karakter, een klassefunctie is. De eerste orthogonaliteitsrelaties, d.w.z. voor ρ en φ irreducibele representaties van G,

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1 & \varphi \sim \rho \\ 0 & \varphi \not\sim \rho \end{cases}$$

  geven ons juist dat $\chi_1, ..., \chi_s$ een orthonormale verzameling in $Z(L(G))$ vormen. We hoeven dus alleen te laten zien dat ze $Z(L(G))$ ook opspannen. Zij f een klassefunctie. Vanwege precies de voorgaande stelling weten we dat er $c_{ij}^{(k)}$ zijn voor $1 \leq k \leq s$, $1 \leq i, j \leq d_k$, dat

$$f = \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \varphi_{ij}^{(k)}$$

  Omdat f een klassefunctie is:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g^{-1}xg) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \varphi_{ij}^{(k)}(g^{-1}xg) \\ &= \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_{ij}^{(k)}(g^{-1}xg) \\ &= \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \left[\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi^{(k)}(g^{-1}) \varphi^{(k)}(x) \varphi^{(k)}(g) \right]_{ij} \\ &= \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} [(\varphi^{(k)}(x))^{\#}]_{ij} \qquad = \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \frac{\mathrm{Tr}(\varphi^{(k)}(x))}{\deg \varphi^{(k)}} I_{ij} \\ &= \sum_{i,k} \frac{1}{d_k} \chi_k(x) \end{aligned}$$

Dit laat zien dat f in de span van $\chi_1, ..., \chi_s$ zit, en dus dat $\chi_1, ..., \chi_s$ een orthonormale basis van $Z(L(G))$ vormen.

- ***Corrolarium*** Als gevolg is $|\operatorname{Cl}(G)|$ het aantal s van inquivalente representaties op G.

  Bewijs $\dim(Z(L(G))) = |\operatorname{Cl}(G)|$ omdat δ_C, $C \in \operatorname{Cl}(G)$ een basis is van $Z(L(G))$. Anderzijds is er ook de basis $\chi_1, ..., \chi_s$, dus $s = |\operatorname{Cl}(G)|$

- ***Corrolarium*** Een eindige groep G is abels dan en slechts dan als er $|G|$ inequivalente irreducibele representaties zijn.

  Bewijs G is abels d.e.s.d.a $|\operatorname{Cl}(G)| = |G|$ (immers elke $g \in G$ heeft dan $hgh^{-1} = g$, dus $\operatorname{Cl}(g) = \{g\}$), dus wegens $s = Z(L(G)) = |\operatorname{Cl}(G)|$ is G abels d.e.s.d.a. $s = |G|$.

- Het karaktertabel X van een eindige groep G met irreducibele karakters $\chi_1, ..., \chi_s$ is een $s \times s$ matrix met $s = |\operatorname{Cl}(G)|$ kolommen geindexeerd door conjugatieklassen en s rijen geindexeerd door irreducibele karakters X_{ij} $\chi_i(C_j)$ is.

  Het blijkt dat de kolommen van deze tabellen orthogonaal zijn (niet per se orthonormaal):

- ***Stelling*** (Tweede orthogonaliteitsrelaties) Zij $C, C' \in \operatorname{Cl}(G)$ en $g \in C, h \in C'$. Dan

$$\sum_{i=1}^{s} \overline{\chi_i(g)}\chi_i(h) = \begin{cases} |G|/|C| & C = C' \\ 0 \\ C \neq C' \end{cases}$$

  Dus X is een orthogonale, en dus inverteerbare matrix.

  Bewijs Gebruik dat $\delta_C = \sum_{i=1} \langle \chi_i, \delta_c \rangle \chi_i$, want χ_i is een orthonormale basis van $Z(L(G))$:

$$\begin{aligned} \delta_C(h) &= \sum_{i=1} \langle \chi_i, \delta_c \rangle \chi_i(h) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_i(x)} \delta_c(x) \chi_i(h) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in C} \overline{\chi_i(x)} \chi_i(h) \\ &= \frac{|C|}{|G|} \sum_{i=1}^{s} \overline{chi_i(g)} \chi_i(h) \end{aligned}$$

  Dus

$$\sum_{i=1}^{s} \overline{\chi_i(g)}\chi_i(h) = \delta_C(h)\frac{|G|}{|C|} = \delta_{C,C'}\frac{|G|}{|C|}$$

5.1

- Hoofdstuk 5 gaat over een algebraïsche structuur op $L(G)$ die afkomstig is van het convolutieproduct. De Fouriertransformatie zorgt ervoor dat we deze kunnen analyseren met bekende ringstructuren. Belangrijk:

  1. Wedderburn's stelling voor groepsalgebra's over de complexe getallen.
  2. Het berekenen van eigenwaarden van de adjacencymatrix van de Cayleygraaf over een abelse groep.

- Een functie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ heet *periodiek* met periode $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ als $f(x) = f(x+n)$ voor alle $x \in \mathbb{Z}$

  Er is een canonieke bijectie tussen periodieke functies op $\mathbb{Z}$ en functies in $L(\mathbb{Z}_n)$, namelijk $f \mapsto \overline{f} \in L(\mathbb{Z}_n)$ door $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$, welgedefinieerd vanwege periodiciteit.

- We weten ook dat $\mathbb{Z}_n$ abels is, dus $Z(L(\mathbb{Z}_n)) = L(\mathbb{Z}_n)$ want klassefuncties (links) hoeven slechts constant te zijn op singletons, en kunnen dus elke functie $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$ zijn (rechts). Bovendien is bekend dat $\mathbb{Z}_n$ abels is, dus er zijn ook n irreducibele karakters $\chi_0, ..., \chi_{n-1}$ en men gaat na dat met $\omega = e^{2\pi i/n}$ de canonieke n-demachts eenheidswortel, we de irreducibele representaties $\chi_k(\overline{m}) = \varphi^{(k)}(\overline{m}) = \omega^{km}$ hebben, welke gelijk zijn aan hun karakters omdat ze graad 1 hebben.

  De irreducibele karakters vormen een basis voor $Z(L(G)) = L(G)$, het volgt dus dat

  $$f = \langle \chi_0, f \rangle \chi_0 + ... + \langle \chi_{n-1}, f \rangle \chi_{n-1}$$

  Hierbij is

  $$\langle \chi_k, f \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} \omega^{km} f(\overline{m})$$

  De Fouriertransformatie maakt van elke coefficient een functie.

- ***Definitie*** (Fouriertransformatie) zij $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$, en definieer de Fouriertransformatie $\hat{f} : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$ van f door

  $$\hat{f}(\overline{m}) = n \langle \chi_m, f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\pi i m k} f(\overline{k})$$

- Omdat per definitie van $\hat{f}$ en de eerste formule volgt $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{n} \hat{f}(\overline{m}) \chi_m = f$, krijgen we dat we ook terug kunnen van $\hat{f}$ naar f, i.e. de Fouriertransform is inverteerbaar.

- ***Propositie*** (Fourier inversie) de Fouriertransformatie is inverteerbaar, en er geldt
$$f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(\overline{k}) \chi_k$$
De Fouriertransformatie is dus een lineaire afbeelding $L(\mathbb{Z}_n) \to L(\mathbb{Z}_n)$.

5.2

- ***Definitie*** (Convolutieproduct) Voor G eindig en $a, b \in L(G)$, definieer $a * b : G \to \mathbb{C}$ door
$$a * b(x) = \sum_{y \in G} a(xy^{-1}) b(y)$$

- ***Eigenschappen***. Schrijf $\delta_h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x = h \\ 0 & x \neq h \end{cases}$ Dan

  1. $\delta_g * \delta_h(x) = \sum_{y \in G} \delta_g(xy^{-1}) \delta_h(y) = \delta_g(xh^{-1}) = \delta_{gh}(x)$
  2. $a * (b + c)(x) = \sum_{y \in G} a(xy^{-1})(b(y) + c(y)) = \sum_{y \in G} a(xy^{-1}) b(y) + \sum_{y \in G} a(xy^{-1}) c(y) = a * b(x) + a * c(x)$ (*distributiviteit*).
  3. $a * \delta_1(x) = \sum_{g \in G} a(xy^{-1}) \delta_1(y) = a(x)$, dus $a * \delta_1 = a$.

  De overige ring-eigenschappen van $*$ gelden ook:

  1. De identiteit is δ_1
  2. $*$ is associatief, zodat we kunnen schrijven $a*b*c$ en dit is welgedefinieerd.
  3. $*$ is distributief, zowel van links als rechts.

- Het blijkt dat het centrum van $L(G)$ op deze manier precies uit de klassefuncties $Z(L(G))$ bestaat:

  Propositie $a * f = f * a$ voor alle $f \in \mathbb{C}$, d.e.s.d.a. $a(xyx^{-1}) = a(y)$ voor alle $x, y \in G$.

  Bewijs $\Longleftarrow$ eenvoudigst:
$$\begin{aligned} a * f(x) &= \sum_{g \in G} a(xg^{-1}) f(g) \\ &= \sum_{g \in G} a(xg^{-1}) f(xgx^{-1}) \\ &= \sum_{xg^{-1} \in G} a(xg^{-1}) f(xgx^{-1}) \\ &= \sum_{h \in G} f(xh^{-1}) a(h) \qquad = f * a(x) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ vereist natuurlijk dat we de relatie $a * f = f * a$ toepassen op een goede keuze voor f: Merk op dat $a(xh) = a(hx)\ \forall x, h \in G$ ook impliceert dat a een klassefunctie is, want dat toepassen op $h = x^{-1}y$ geeft het gevraagde (en dit geldt voor alle y want linksvermenigvuldiging in een groep is een permutatie van de elementen).

$$
\begin{aligned}
a(xh) = a(x(h^{-1})^{-1})\delta_{h^{-1}}(h^{-1}) \\
&= \sum_{g\in G} a(xg)\delta_{h^{-1}}(g) && = a * \delta_{h^{-1}}(x) \\
&= \delta_{h^{-1}} * a(x) \\
&= \sum_{y\in G} \delta_{h^{-1}}(xy^{-1}) * a(y) \\
&= [h^{-1} = xy^{-1} \iff y = hx]a(hx)
\end{aligned}
$$

En dit is voldoende.

De benodigde functie f blijkt dus $\delta_{h^{-1}}$ te zijn.

- Hiermee is vastgesteld dat $Z(L(G))$ inderdaad het ringtheoretische centrum van $L(G)$ is.

5.3

- De belangrijkste groepen in signaalverwerking en getaltheorie zijn meestal abels.
- Als G abels is, dan zijn er evenveel conjugatieklassen als elementen. Er zijn dus ook evenveel dimensies van klassefuncties als de dimensie van de groepsalgebra, i.e. $Z(L(G)) = L(G)$. In het bijzonder, omdat $Z(L(G))$ het ringtheoretische centrum van $L(G)$ bleek te zijn, volgt dat $L(G)$ een commutatieve ring is met het convolutieproduct.

  We nemen $n = |G|$ irreducibele karakters $\chi_1, ..., \chi_n : G \to \mathbb{C}$, elk geassocieerd met een van de elementen $g_1, ..., g_n$ van G.
- ***Definitie*** (*Fourier transformatie*) Zij $f \in L(G)$. Dan

$$\hat{f}(g_i) = n\chi_i, f\rangle = \sum_{g\in G} \overline{\chi_i(g)} f(g)$$

  De definitie van de Fourier transformatie hangt af van een (meestal nietcanonieke) ordening $g_1, ..., g_n$ van de elementen van G en $\chi_1, ..., \chi_n$ van de irreducibele karakters van G. In paragraaf 5.1 was deze natuurlijk: $\overline{0}, ..., \overline{n-1}$ en $\chi_k : \overline{m} \mapsto \omega^{2\pi ikm}$. Dit vertaalt naar een term $\chi_k(\overline{m}) = e^{-2\pi ikm/n}$

- In het bijzonder, voor χ_i een irreducibel karakter,

$$\hat{\chi_i}(g_i) = n\langle \chi_i \chi_j \rangle = n\delta_{ij}$$

En verder is $\hat{}$ lineair:

$$\widehat{f_1 + \lambda f_2}(g_i) = n\langle \chi_i, f_1 + \lambda f_2 \rangle = n\langle \chi_i, f_1 \rangle + \lambda n\langle \chi_i, f_2 \rangle = (\hat{f}_1 + \lambda \hat{f}_2)(g_i)$$

- ***Stelling*** (*Fourierinversie*. Voor $f \in L(G)$ hebben we

$$f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{f}(g_i)\chi_i$$

En dus is de fouriertransformatie $\hat{} : L(G) \to L(G)$ inverteerbaar.

Bewijs

$$f = \sum_{i=1}^{n} \langle \chi_i f \rangle \chi_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n\langle \chi_i f \rangle \chi_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{f}(g_i)\chi_i$$

- ***Propositie*** $T : L(G) \to L(G)$ door $Tf = \hat{f}$ is in $GL(L(G))$.

Bewijs

T is lineair, en injectief omdat we f kunnen verkrijgen uit $\hat{f}$. Dit maakt T bijectief omdat domein en codomein dezelfde dimensie hebben, dus T is inverteerbaar.

- We kunnen $L(G)$ ook tot ring maken door puntsgewijze multiplicatie $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ in te voeren en dezelfde puntsgewijze additie te behouden. In $(L(G), *)$ is de multiplicatieve identiteit δ_1, in $(L(G), \cdot)$ is dit de contante functie $1 : x \mapsto 1, G \to \mathbb{C}$. We laten nu zien dat T een isomorfisme is $(L(G), *, +) \to (L(G), \cdot, +)$. Het is al een lineair isomorfisme, dus het bewaart al $+$ en is bijectief.

Daarom voldoende is om aan te tonen dat het het product bewaart:

$$T(a * b) = Ta \cdot Tb$$

Stelling De Fourier tranform voldoet aan

$$\widehat{a * b} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

Bewijs

$$
\begin{aligned}
a \hat{*} b(g_i) &= n\chi_i a * b\rangle \\
&= n\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{\chi_i(x)}(a*b)(x) \\
&= \sum_{x\in G}\overline{\chi_i(x)}\sum_{[} y\in G]a(xy^{-1})b(y) \\
&= \sum_{y\in G}b(y)\sum_{x\in G}\overline{chi_i(x)}a(xy^{-1}) \\
&[z = xy^{-1} \implies x = zy] \\
&= \sum_{y\in G}b(y)\sum_{z\in G}\overline{\chi_i(zy)}a(z) \\
&[\chi_i(zy) = \varphi^{(i)}(zy) = \varphi^{(i)}(z)\varphi^{(i)}(y) = \chi_i(z)\chi_i(y)] \\
&= \sum_{y\in G}\overline{\chi_i(y)}b(y)\sum_{x\in G}\overline{\chi_i(z)}a(z) \\
&= \hat{a}(g_i)\hat{b}(g_i) \\
&= \hat{b}(g_i)\hat{a}(g_i)
\end{aligned}
$$

- Tenslotte een toepassing, door weer naar $\mathbb{Z}_n$ te kijken en naar $L(\mathbb{Z}_n)$, ofwel de periodieke functies $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Het convolutieproduct van twee periodieke functies is

  $$f * g(m) = \sum_{k=0}^{n-1} f(m-k)g(k)$$

  De Fouriertransformatie was (en is in de context van periodieke functies):

  $$\hat{f}(m) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\pi imk/n} f(k)$$

  Terwijl we ook weten uit fourierinversie dat

  $$f(m) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi imk/n}\hat{f}(k)$$

  En de multiplicatieformule geeft (immers f en g en $f*g$ zijn te identificeren met functies in $L(G)$) dat $f \hat{*} g = \hat{f} \cdot \hat{g}$. Een praktische toepassing van deze theorie is, dat het sneller is dan $\hat{f} \cdot \hat{g}$ te berekenen, dit vereist slechts n

4.5

- We gaan weer terug naar abelse groepen, en bekijken hoe karakters van een abelse groep te berekenen. Omdat elke eindige abelse groep G te scrhijven is als direct product $\bigtimes_{i=1}^{p} \mathbb{Z}_{n_i}^{m_i}$ van cyclische groepen, en we al de irreducibele karakters van $\mathbb{Z}_n$ kennen, hoeven we alleen te weten hoe de karakters van een direct product van abelse groepen te berekenen.

- ***Stelling*** (*Herhaling: ontbinding eindige abelse groepen*) Een eindige abelse groep G is te schrijven als (herhaald) direct product $\bigtimes_{i=1}^{p} \mathbb{Z}_{n_i}^{m_i}$ van cylische groepen.

  Bewijs Neem $h \in G$ ongelijk aan 1. Dan heeft g orde > 1. Als $\mathrm{ord}(h) = |G|$ dan zijn we klaar, want dan is G cyclisch.

  Anders is $N := \langle h \rangle \subset G$ een niet-triviale, propere ondergroep. Alle ondergroepen van abelse groepen zijn normaal, en elke $g \in G$ valt in een unieke coset G/N, dus is fh^n voor een unieke $0 \leq n < \mathrm{ord}(h)$.

  Er is dus een bijectie $\varphi : G \to (G/N) \times N$ door $g \to (\overline{f}, h^n)$. Bovendien is dit een homomorfisme omdat G/N een groep is: want $\varphi(fh^n kh^m) = \varphi(\overline{fk}, h^{n+m}) = (\overline{f}, h^n)(\overline{k}, h^m) = \varphi(fh^n)\varphi(kh^m)$.

  We hebben dus isomorfie $G \cong (G/N) \times N$. Omdat N niet-triviaal is, $|G/N| < |G|$ dus met een sterke inductiehypothese (de inductiebasis $G = \{1\}$ is triviaal cyclisch) volgt dat G/N een direct product van cyclische groepen is. Het resultaat volgt omdat N cyclisch is.

  De cruciale stap waarbij gebruikt wordt dat G abels is, is wanneer we zeggen dat N een normaaldeler is, en daarmee φ een homomorfisme.

- ***Propositie*** Zij G_1, G_2 eindige abelse groepen en $\chi_1, ..., \chi_m$ en $\varphi_1, ..., \varphi_n$ de irreducibele representaties van G_1, G_2 respectievelijk (dus $n = |G_1|$, $m = |G_2|$) Dan $\alpha_{ij} : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}^*$ voor $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ door

  $$\alpha_{ij}(g_1, g_2) = \chi_i(g_1)\varphi_i(g_2)$$

  Zijn een complete set van irreducibele representaties van $G_1 \times G_2$.

  Bewijs $G_1 \times G_2$ is abels dus $L(G_1 \times G_2) = Z(L(G_1 \times G_2))$ en we hebben dus precies mn irreducibele karakters. Het is dus voldoende om te bewijzen dat α_{ij} steeds een homomorfisme is en dat $\alpha_{ij} \neq \alpha_{kl}$ als $i \neq k$ of $j \neq l$, immers equivalentie van representaties wanneer de graad 1 is komt wegens commutativiteit van $\mathbb{C}^*$ neer op gelijkheid.

  Voor homomorfie:

  $$\begin{aligned}
  \alpha_{ij}(g_1, g_2)\alpha_{ij}(g_1', g_2') &= \chi_i(g_1)\varphi_j(g_2)\chi_i(g_1')\varphi_j(g_2') \\
  &= \chi_i(g_1)\chi_i(g_1')\varphi_i(g_2)\varphi_i(g_2') \\
  &= \chi_i(g_1 g_1')\varphi_i(g_2 g_2') \\
  &= \alpha_{ij}(g_1 g_1', g_2 g_2')
  \end{aligned}$$

Gelijkheid laten we natuurlijk zien door als $\alpha_{ij} = \alpha_{kl}$, deze in een geschikt element te evalueren: bijvoorbeeld $(1, g)$ en $(g, 1)$:

$$\alpha_{ij}(1, g) = \chi_i(1)\varphi_j(g) = \varphi_j(g)$$
$$\alpha_{kl}(1, g) = \chi_k(1)\varphi_l(g) = \varphi_l(g)$$

Dit impliceert $\varphi_j(g) = \varphi_l(g)$ voor elke $g \in G_2$, dus $j = l$. Evenzo evalueren in $(g, 1)$ geeft $i = k$, dus $ij = kl$. Dit betekent dat alle α_{ij} verschillende representaties/karakters zijn.

Ze zijn irreducibel omdat ze graad 1 zijn. Het zijn nm verschillende. We hebben dus alle irreducibele karakters van $G_1 \times G_2$ gevonden.

8.1

- Als $f : G \to H$ een homomorfisme van groepen is en $\varphi : H \to GL(V)$ een representatie, dan is $\rho = \varphi \circ f$ een representatie van G op V.

  Lemma Als f surjectief is en φ irreducibel is, dan is $\varphi \circ f$ irreducibel.

  Bewijs Laat $W \leq V$ een G-invariante deelruimte zijn onder $\varphi \circ f$. Dan voor elke $g \in G$ geldt $(\varphi \circ f)_g W \subset W$. Voor elke $h \in H$ is er een $g \in G$ zodat $f(g) = h$, dus voor elke $h \in H$ is $\varphi_h W = (\varphi \circ f)_g W \subset W$¡ dus W is een H-invariante deelruimte.

  Elke propere G-invariante deelruimte van V onder $\varphi \circ f$ induceren dus een propere H-invariante deelruimte van V onder φ, dus als H irreducibel is, dan is $\varphi \circ f$ dat ook.

- ***Lemma*** (6.2.6) Als G eindig is, dan kunnen alle graad 1 irreducibele representaties worden verkregen door irreducibele representaties $\rho G/G_{ab} \to \mathbb{C}^*$ te nemen en $\varphi q : G \to \mathbb{C}^*$ te bekijken, $q : G \to G/G_{ab}$ het canonieke homomorfisme.

  Bewijs Als ρ zo'n representatie is, dan is ρq ook irreducibel want q is surjectief. Andersom, als $\rho : G \to \mathbb{C}^*$ irreducibel is, dan wegens $\operatorname{Im} \rho \cong G/\ker \rho$ abels (de linkerzijde is nl. een ondergroep van $\mathbb{C}^*$. Dus $G_{ab} \subset \ker \rho$. Dit maakt ρ constant op de restklassen G/G_{ab}

  Dit geeft wegens de eerste homomorfiestelling dat er een homomorfisme $\overline{\varphi} : G/G_{ab} \to \mathbb{C}^*$ is met $\overline{\varphi}(gG_{ab}) = \varphi(g)$ voor alle $g \in G$, dus zodanig dat $\varphi q = \overline{\varphi}$. Dit geeft de vereiste representatie van G/G_{ab}.

  Simpel gezegd induceert elke representatie $\rho : G \to \mathbb{C}^*$ een representatie $G/G_{ab} \to \mathbb{C}^*$ omdat $\mathbb{C}^*$ abels is, dus ρ factoriseert via G/G_{ab}

- Stel dat H nu geen quotientgroep, maar een ondergroep van G is, kunnen we deze uitbreiden tot een representatie voor G? Dit kan middels de methode van Frobenius.

Omdat we al representaties van abelse groepen kunnen maken, kunnen we dit bijvoorbeeld handig gebruiken op abelse deelgroepen.

- Het erste doel is om een karakter $\chi_\pi \in L(H)$ van een representatie π op H uit te breiden tot een klassefunctie $\chi \in L(G)$; later zullen we laten zien dat deze bij een representatie ρ van G hoort.

  Propositie Zij $H \leq G$. Dan is $\mathrm{Res}_H^G : f \mapsto f|_H$, $L(G) \to L(H)$, lineair.

  Bewijs Vooral belangrijk is te laten zien dat als $f : G \to \mathbb{C}$ een klassefunctie is, dan $\mathrm{Res}_H^G f$ is dat op H: $x, h \in H$, dan $x, h \in G$, dus $(\mathrm{Res}_H^G f)(hxh^{-1}) = f(hxh^{-1}) = f(x) = (\mathrm{Res}_H^G f)(x)$. Tenslotte is voor elke $x \in H$, $(\mathrm{Res}_H^G(f + \lambda g))(x) = (f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = (\mathrm{Res}_H^G f)(x) + \lambda(\mathrm{Res}_H^G g)(x)$.

- ***Definitie*** (*Inductie*) Voor $f : H \to \mathbb{C}$ en $H \leq G$, definieer

$$\dot{f} = \begin{cases} f(x) & x \in H \\ 0 & x \notin H \end{cases}$$

  $f \mapsto \dot{f}$ is lineair $L(H) \to L(G)$. Hiermee definiëren we $\mathrm{Ind}_H^G : Z(L(H)) \to Z(L(G))$, *inductie*, door:

$$\mathrm{Ind}_H^G f(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{f}(x^{-1}gx)$$

  Als χ een karakter is, dan heet $\mathrm{Ind}_H^G \chi$ het *geinduceerde karakter* op G.

- We moeten uiteraard nog bewijzen dat $\mathrm{Ind}_H^G f \in Z(L(G))$ voor $f \in Z(L(H))$. En we willen graag laten zien dat Ind_H^G inderdaad lineair is. Daarna laten we namelijk zien dat het de geadjungeerde van Res_H^G is.

  Propositie Laat $Z \leq G$. Dan is de afbeelding

$$\mathrm{Ind}_H^G Z(L(G)) \to Z(L(G))$$

  lineair.

  Bewijs Om te laten zien dat $\mathrm{Ind}_H^G f$ een klassefunctie is voor $f \in Z(L(G))$, neem $y, g \in G$ en bekijk $f(y^{-1}gy)$:

$$\begin{aligned} f(y^{-1}gy) &= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{f}(x^{-1}y^{-1}gyx) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{z \in G} \dot{f}(z^{-1}gz) = \mathrm{Ind}_H^G f(g) \end{aligned}$$

  Waar we $z = yx$ nemen en gebruiken dat linksvermenigvuldiging $y \in S_G$ een bijectie is.

Vervolgens lineairiteit:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}_H^G(f_1+\lambda f_2)(g) &= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\overset{\cdot}{\overbrace{f_1+\lambda f_2}}(x^{-1}gx)\\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}[\dot{f}_1(x^{-1}gx)+\lambda \dot{f}_2(x^{-1}gx)]\\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{f}_1(x^{-1}gx)+\lambda\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{f}_2(x^{-1}gx)
\end{aligned}$$

We passen in elke term lineariteit toe van $f\mapsto \dot{f}$

- ***Stelling*** (*Frobenius Reciprociteit*) $\operatorname{Res}_H^G : Z(L(G))\to Z(L(H))$ en $\operatorname{Ind}_H^G : Z(L(H))\to Z(L(G))$ zijn geadjungeerd:

  $$\langle \operatorname{Res}_H^G a, b\rangle_H = \langle a, \operatorname{Ind}_H^G b\rangle_G$$

  Bewijs

  $$\begin{aligned}
  \langle a, \operatorname{Ind}_H^G b\rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{a(g)}(\operatorname{Ind}_H^G b)(g)\\
  &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{a(g)}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{b}(x^{-1}gx)\\
  &= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{g\in G}\overline{a(g)}\dot{b}(x^{-1}gx)
  \end{aligned}$$

  de term $\dot{b}(x^{-1}gx)$ is niet-0 $\iff x^{-1}gx\in H \iff g = xhx^{-1}$ met $h\in H$. Dus we kunnen herindexeren:

  $$\begin{aligned}
  \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{g\in G}\overline{a(g)}\dot{b}(x^{-1}gx) &= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{h\in H}\overline{a(xhx^{-1})}\dot{b}(h)\\
  &= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{h\in H}\overline{a(h)}\dot{b}(h)\\
  &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \operatorname{Res}_H^G a, b\rangle\\
  &= \langle \operatorname{Res}_H^G a, b\rangle
  \end{aligned}$$

  De tweede gelijkheid gebruikt dat a een klassefunctie is.

- De Frobenius reciprociteit zegt dat als χ een irreducibel karakter voor H is en ξ een irreducibel karakter voor G, dan is de multipliciteit van ξ in Ind_G^H even groot als die van χ in $\operatorname{Res}_G^H \xi$.

- ***Propositie*** Laat $H \leq G$ en $t_1, ..., t_m$ een representantensystem van de linkercosets $G/H = \{gH \subset G : g \in G\}$. Als $f \in Z(L(H))$, dan:

$$\operatorname{Ind}_G^H f(g) = \sum_{i=1}^{m} \dot{f}(t_i^{-1} g t_i)$$

Bewijs G is de disjuncte vereniging $t_1 H \cup ... \cup t_m H$, en elke $t_i H$ is af te tellen als $\{t_i h\}_{h \in H}$, daarom:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_G^H f(g) &= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{f}(x^{-1} g x) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{h \in H} \dot{f}(h^{-1} t_i^{-1} g t_i h) \end{aligned}$$

Bovendien als $h \in H$, $h^{-1} t_i g t_i h \in H \iff h h^{-1} t_i^{-1} g t_i h h^{-1} = t_i^{-1} g t_i \in H$, daarom is de relatie $f(t_i g t_i^{-1}) = f(g)$ goed gevormd en waar, omdat f juist een klassefunctie op H is. Alleen als $t_i g t_i^{-1} \notin H$, is $\dot{f}(t_i g t_i^{-1}) = 0 = \dot{f}(h t_i g t_i^{-1} h^{-1})$, want alleen dan ook $h t_i g t_i^{-1} h^{-1} \notin H$. Al met al volgt dus $\dot{f}(h^{-1} t_i^{-1} g t_i h) = \dot{f}(t_i^{-1} g t_i)$ voor alle $g \in G$, dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{h \in H} \dot{f}(h^{-1} t_i^{-1} g t_i h) &= \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{h \in H} \dot{f}(t_i^{-1} g t_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \dot{f}(t_i^{-1} g t_i) \end{aligned}$$

QED.

8.2

- Als $\varphi : G \to GL(V)$ een representatie is, $H \leq G$, dan kunnen we ook de restrictie $\operatorname{Res}_H^G \varphi : H \to GL(V) = \varphi|_H$ bekijken. Bovendien, voor $h \in H$,

$$\chi_{\operatorname{Res}_H^G \varphi}(h) = \operatorname{Tr}(\operatorname{Res}_H^G \varphi(h)) = \operatorname{Tr}(\varphi(h)) = \chi_\varphi(h) = \operatorname{Res}_H^G \chi_\varphi(h)$$

Dus hebben we gewoon dat $\operatorname{Res}_H^G \chi_\varphi = \chi_{\operatorname{Res}_H^G \varphi}$. Dus restrictie Res_H^G beeldt een karakter χ_φ af op een karakter χ', dat is handig om te weten. We weten ook van welke representatie χ' het karakter is, namelijk precies van $\varphi|_H$.

We gaan laten zien dat Ind_H^G ook karakters naar karakters stuurt, maar de constructie van de onderliggende representatie φ' van $\chi_{\varphi'} = \operatorname{Ind}_H^G \chi_\varphi$ is weer wat ingewikkelder.

- We kunnen bijvoorbeeld laten zien dat inductie op de triviale representatie/karakter χ_1 van de triviale ondergroep $\{1\} \leq G$ de reguliere representatie geeft.

  $$\mathrm{Ind}_{\{1\}}^G \chi_1(g) = \sum_{g\in G} \dot{\chi}_1(x^{-1}gx)$$

  Nu $x^{-1}gx \in \{1\} \iff g = 1$. Dus

  $$\mathrm{Ind}_{\{1\}}^G \chi_1(g) = \begin{cases} |G| & g = 1 \\ 0 & g \neq 1 \end{cases}$$

  Dit is het karakter van de reguliere representatie $G \to \mathbb{C}G$, $g \mapsto (\sum_{x\in G} c_x x \mapsto c_{g^{-1}x} x)$ van G.

- (*Permutatierepresentatie, zie H.7*)

  Voor een verzameling X waar G een actie $\sigma : G \to S_X$ op heeft, is er de representatie $\tilde{\sigma} : G \to \mathbb{C}X$ door

  $$\tilde{\sigma}_g(\sum_{x\in X} c_x x) = \sum_{x\in X} c_x \sigma_g(x) = \sum_{y\in X} c_{\sigma_{g^{-1}} y} y$$

  Dit heet de *permutatierepresentatie*, welke de basiselementen van $\mathbb{C}X$ permuteert door de werking σ_g uit te voeren. De reguliere representatie is simpelweg de permutatierepresentatie waarbij we $X = G$ nemen en de actie $G \to S_G$ van linksvermenigvuldiging. Dit kunnen we ook zien als een actie op de cosets $G/\{1\}$ en dit is te generaliseren naar arbitraire ondergroepen door te kijken naar de werking van G op G/H.

  De permutatierepresentatie generaliseert in die zin dus de reguliere representatie L. Evenzeer is hij unitair op $\mathbb{C}X$, weer omdat hij de basiselementen simpelweg permuteert. We kunnen nagaan dat de permutatierepresentatie het volgende karakter heeft:

  $$\chi_{\tilde{\sigma}}(g) = |\operatorname{Fix}(g)|$$

  Aangezien de diagonaalelementen van de matrix van $\sigma(g)$ ten opzichte van een willekeurig geordende basis van $X = \{x_1, ..., x_n\}$ gegeven zijn als

  $$[\tilde{\sigma}(g)]_{ii} = \begin{cases} 1 & \sigma(x_i) = x_i \iff x_i \in \operatorname{Fix}(g) \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

  Sommeren de diagonaalelementen precies op tot $|\operatorname{Fix}(g)|$.

- Neem $H \leq G$ en bekijk de actie $\sigma : G \to S_{G/H}$ door $\sigma_g(xH) = gxH$. Hiervan maken we dus representatie op $\mathbb{C}[G/H]$ door $\tilde{\sigma}_g(xH) = gxH$ op de basiselementen, de permutatierepresentatie geinduceerd door linkswerking op de cosets. Het karakter werd gegeven door $\chi_{\tilde{\sigma}}(g) = |\operatorname{Fix}(g)|$

  Anderzijds kunnen we het triviale karakter $1 = \chi_1 : H \to \mathbb{C}^*$ bekijken. Dan
$$\dot{\chi}_1(x^{-1}gx) = \begin{cases} 1 & x^{-1}gx \in H \\ 0 & x^{-1}gx \notin H \end{cases}$$

  Dit betekent dat $|H| \cdot \operatorname{Ind}_H^G \chi_1(g) = \sum_{x \in G} \dot{\chi}_1(x^{-1}gx)$ precies het aantal $x \in G$ telt met $x^{-1}gx \in H$

  Aangezien $xH \in \operatorname{Fix}(g) \iff gxH = xH \iff x^{-1}gx \in H$ en per $xH \in G/H$ zijn er $|H|$ $x' \in G$ die $x'H = xH$ hebben, telt deze som ook wel de cosets $xH \in \operatorname{Fix}(g)$, maar elke klasse $xH \in \operatorname{Fix}(g)$ wordt hierbij $|H|$ keer dubbel geteld omdat xH wordt geteld voor elke $x' \in G$ met $x'H = xH$.

  Dat betekent $|H| \operatorname{Ind}_H^G \chi_1(g) = |H||\operatorname{Fix}(g)|$, dus $\operatorname{Ind}_H^G \chi_1(g) = |\operatorname{Fix}(g)| = \chi_{\tilde{\sigma}}(g)$. Ind_H^G is dus precies het karakter van de permutatierepresentatie.

- Tot nu toe alleen nog maar voorbeelden die motiveren dat Ind_H^G karakters naar karakters zendt.

  We gaan nu een algemene constructie geven van dit geinduceerde karakter.

- (*Dot-notatie, geinduceerde representatie*)

  Voor G eindige groep, $\varphi : H \to GL_d(\mathbb{C})$ een representatie op H, $H \leq G$ met $m = [G : H]$ en $t_1, ..., t_m$ een representantensysteem voor de linkercosets G/H, i.e. $t_1H \cup ... \cup t_mH = G$ als disjuncte vereniging. Z.v.v.a. $t_1 = 1$.

  De dot-notatie wordt nu voor representaties geintroduceerd:
$$\dot{\varphi}_x = \begin{cases} \varphi_x & x \in H \\ 0 & x \notin H \end{cases}$$

  Hier is $0 : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ de $d \times d$ nulmatrix. Het is duidelijk dat deze dot geen representatie op G geeft want $0 \notin GL_d(\mathbb{C})$.

  Schrijf nu φ^G voor wat we $\operatorname{Ind}_H^G \varphi$, de *geïnduceerde representatie* gaan noemen. Voor elke $g \in G$ is φ_g^G een $md \times md$ matrix van $m \times m$ blokken van $d \times d$ matrices, waarbij we de m^2 blokken indexeren met $1 \leq i, j \leq m$

  Deze matrix is gedefinieerd door $[\varphi_g^G]_{ij} = \dot{\varphi}_{t_i^{-1}gt_j}$, oftewel
$$\varphi_g^G = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{t_1^{-1}gt_1} & \dot{\varphi}_{t_1^{-1}gt_2} & \cdots & \dot{\varphi}_{t_1^{-1}gt_m} \\ \dot{\varphi}_{t_2^{-1}gt_1} & \dot{\varphi}_{t_2^{-1}gt_2} & \cdots & \dot{\varphi}_{t_2^{-1}gt_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dot{\varphi}_{t_{m-1}^{-1}gt_m} \\ \dot{\varphi}_{t_m^{-1}gt_1} & \cdots & \dot{\varphi}_{t_m^{-1}gt_{m-1}} & \dot{\varphi}_{t_m^{-1}gt_m} \end{pmatrix}$$

- ***Stelling*** (*De geinduceerde representatie*) Zij H een ondergroep van G van index m en zij $\varphi : H \to GL_d(\mathbb{C})$ een representatie van H. Dan is $\operatorname{Ind}_H^G \varphi : G \to GL_{md}(\mathbb{C})$ een representatie en $\chi_{\operatorname{Ind}_H^G \varphi} = \operatorname{Ind}_H^G \chi_\varphi$. In het bijzonder beeldt $\operatorname{Ind}_H^G : Z(L(H)) \to Z(L(G))$ karakters op karakters af.

  Bewijs We herintroduceren de notatie van het vorige punt niet.

  Ten eerste: φ^G is een representatie. Want, als $x, y \in G$, dan

$$[\varphi_x^G \varphi_y^G]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} [\varphi_x^G]_{ik} [\varphi_y^G]_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \dot{\varphi}_{t_i^{-1} x t_k} \dot{\varphi}_{t_k^{-1} y t_j} \tag{1}$$

  Merk op dat voor de termen rechts in 1 geldt:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{t_i^{-1} x t_k} \dot{\varphi}_{t_k^{-1} y t_j} \neq 0 &\iff \dot{\varphi}_{t_i^{-1} x t_k} \neq 0 \wedge \dot{\varphi}_{t_k^{-1} y t_j} \neq 0 && (2)\\ &\iff t_k^{-1} y t_j \in H \wedge t_i^{-1} x t_k \in H && (3)\\ &\iff y t_j H = t_k H \wedge x^{-1} t_i H = t_k H && (4) \end{aligned}$$

  Er is hoogstens één zo'n t_k omdat $t_1, ..., t_m$ een representantensysteem vormt. We onderscheiden dus twee gevallen: ofwel er is (precies één) t_k, of er is er geen voor deze x, y en t_i, t_j.

  - t_k *bestaat*: Alleen voor die k, als die bestaat, is $\dot{\varphi}_{t_i^{-1} x t_k} \dot{\varphi}_{t_k^{-1} y t_j} = \varphi_{t_i^{-1} x t_k} \varphi_{t_k^{-1} y t_j} = \varphi_{t_i^{-1} x y t_j}$, en aangezien dan ook geldt $t_i^{-1} x y t_j = (t_i^{-1} x t_k)(t_k^{-1} y t_j) \in H$ (H is een ondergroep), is $\varphi_{t_i^{-1} x y t_j} = \dot{\varphi}_{t_i^{-1} x y t_j}$. We hebben dus:

$$\begin{aligned} [\varphi_x^G \varphi_y^G]_{ij} &= \dot{\varphi}_{t_i^{-1} x t_k} \dot{\varphi}_{t_k^{-1} y t_j} \\ &= \varphi_{t_i^{-1} x t_k} \varphi_{t_k^{-1} y t_j} \\ &= \varphi_{t_i^{-1} x y t_j} \\ &= \dot{\varphi}_{t_i^{-1} x y t_j} \\ &= [\varphi_{xy}^G]_{ij} \end{aligned}$$

  - t_k *bestaat niet*: Dan is is de som rechts in (1) gelijk aan 0. Er kan dan ook niet kan gelden $t_i^{-1} x y t_j \in H$, anders zou immers $y t_j H = x^{-1} t_i H$ en dat is voor een geschikte keuze van t_k in het (complete!) representantensysteem t_k gelijk aan $t_k H$.

    Er geldt dat $\dot{\varphi}_{t_i^{-1} x y t_j} = 0$, dus

$$\begin{aligned} [\varphi_x^G \varphi_y^G]_{ij} &= 0 \\ &= \dot{\varphi}_{t_i^{-1} x y t_j} \\ &= [\varphi_{xy}^G]_{ij} \end{aligned}$$

In beide gevallen zien we dat $[\varphi_x^G \varphi_y^G]_{ij} = [\varphi_{xy}^G]_{ij}$, dus inderdaad geldt $\varphi_x^G \varphi_y^G = \varphi_{xy}^G$ als $md \times md$-matrices, voor willekeurige $x, y \in G$. Hiermee is φ^G een homomorfisme.

Tenslotte geldt wegens de propositie $f^G(g) = \sum_{i=1}^m \dot{f}^G(t_i^{-1} g t_i)$ voor $f \in Z(L(H))$, dus dit toepassen op $f = \chi_\varphi$ geeft:

$$\begin{aligned}
\chi_\varphi^G(g) &= \sum_{i=1}^m \dot{\chi}_\varphi^G(t_i^{-1} g t_i) \\
&= \sum_{i=1}^m \operatorname{Tr}(\dot{\varphi}(t_i^{-1} g t_i)) \\
&= \sum_{i=1}^m \operatorname{Tr}([\varphi_g^G]_{ii}) \\
&= \sum_{i=1}^m \operatorname{Tr}(\varphi^G) \\
&= \chi_{\varphi^G}(g)
\end{aligned}$$

Oftewel $\operatorname{Ind}_G^H \chi_\varphi = \chi_{\operatorname{Ind}_G^H \varphi}$. In het bijzonder hoort er een representatie bij $\operatorname{Ind}_G^H \chi_\varphi$, en dat betekent dat als we een ρ representatie van G vinden die $\chi_\rho = \operatorname{Ind}_G^H \chi_\varphi$ heeft, dan is $\rho \sim \varphi$ want schrijf

$$\chi_\rho = \sum_{i=1}^s m_i \chi_i \quad \chi_\varphi = \sum_{i=1}^s n_i \chi_i$$

Dan wegens $\chi_1, ..., \chi_s$ een orthonormale basis van $Z(L(G))$ volgt dat $m_i = n_i$ voor $1 \leq i \leq s$ dus ontbinden χ en ρ als dezelfde directe som van irreducibele representaties.

8.3

- Zoals we zagen in $\operatorname{Ind}_{\{1\}}^G \chi_1 = L$, is er geen garantie dat een inductie van een irreducibele representatie weer irreducibel is. We weten dat het criterium voor irreducibiliteit van een representatie ρ is dat $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$. In het geval van $\rho = \varphi^G$ kunnen we irreducibiliteit dus controleren door te kijken naar

$$\langle \operatorname{Ind}_G^H \chi_\varphi, \operatorname{Ind}_G^H \chi_\varphi \rangle = \langle \operatorname{Res}_H^G \operatorname{Ind}_H^G \chi_\varphi, \chi_\varphi \rangle$$

  We willen dus graag weten wat $\operatorname{Res}_H^G \operatorname{Ind}_G^H$ doet.

- ***Definitie*** Twee representaties φ en ρ heten *disjunct* als ze geen gemeenschappelijke irreducibele constituenten hebben.

Eigenschap Schrijf $\varphi = \bigoplus_{i=1}^s m_i\varphi^{(i)}$, $\rho = \bigoplus_{i=1}^s m_i\varphi^{(i)}$. Disjunctie betekent dus $m_i \neq 0 \implies n_i = 0$, en hieraan is voldaan d.e.s.d.a. $\langle \chi_\varphi = \chi_\rho \rangle = \sum_{i=1}^s n_i m_i = 0$, een soort complementaire slackheid.

- ***Definitie*** (*Dubbele coset*) $H, K \leq G$, definieer $\sigma : H \times K \to G$ door $\sigma_{(h,k)}(g) = hgk^{-1}$. De baan van g onder $H \times K$ is de verzameling

$$HgK = \{hgk : h \in H, k \in K\}$$

Deze heet de *dubbele coset* van g. De partitie van alle dubbele cosets wordt geschreven als $H\backslash G/K$.

Als H een normale ondergroep is van G, dan $H\backslash G/H = G/H$ want voor elke $h \in H$ ligt $g^{-1}hg \in H$ voor elke $g \in G$, dus $hg = gh'$ voor een $h' \in H$, i.h.b. is $Hg = gH$ voor $g \in G$, dus $HgH = gHH = gH$ voor $g \in G$.

- ***Stelling*** (*Mackey*) Laat $H, K \leq G$ en S een representantensysteem voor $H\backslash G/K$. Dan voor $f \in Z(L(K))$,

$$\operatorname{Res}_H^G \operatorname{Ind}_K^G f = \sum_{s \in S} \operatorname{Ind}_{H \cap sKs^{-1}}^H \operatorname{Res}_{H \cap sKs^{-1}}^{sKs^{-1}} f^s$$

Waar $f^s \in Z(L(sKs^{-1}))$ gegeven is door $f^s(x) = f(s^{-1}xs)$.

Bewijs Merk als eerste op dat sKs^{-1} inderdaad een groep is en dat de doorsnede van groepen $H \cap sKs^{-1}$ wederom een groep is. Bovendien is $\operatorname{Res}_H^G \operatorname{Ind}_K^G f \in Z(L(H))$ en $\operatorname{Ind}_{H \cap sKs^{-1}}^H \operatorname{Res}_{H \cap sKs^{-1}}^{sKs^{-1}} \in Z(L(H))$.

We hebben als enige gereedschap dat voor klassefuncties $f \in Z(L(K))$ geldt

$$\operatorname{Ind}_K^G f(h) = \sum_{t \in T} \dot{f}(t^{-1}ht)$$

Waar T een representantensysteem voor G/K is. We moeten dus een representantensysteem construeren voor G/K dat ook een mooi representantensysteem voor $H/(H \cap sKs^{-1})$ oplevert voor elke $s \in S$.

Kies dus voor elke $s \in S$ een complete set representanten V_s voor $H/(H \cap sKs^{-1})$, dan is $H = \cup_{v \in V_s} v(H \cap sKs^{-1})$ als disjuncte vereniging.

$$\begin{aligned}
HsK &= HsKs^{-1}sKs^{-1}s \\
&= \bigcup_{v \in V_s} v(H \cap sKs^{-1})sKs^{-1}s \\
&\overset{(1)}{=} \bigcup_{v \in V_s} v(H \cap sKs^{-1})sKs^{-1}s \\
&= \bigcup_{v \in V_s} vsK
\end{aligned}$$

Toelichting: $H \cap sKs^{-1} \subset sKs^{-1}$, dus voegt de verzameling $H \cap sKs^{-1}$ geen extra elementen toe en daarom is gelijkheid (1) geldig. In de laatste gelijkheid halen we het kunststuk $s^{-1}s$ weer weg.

Deze vereniging is disjunct, want als $vsK = v'sK$ dan $s^{-1}v^{-1}v's = \in K$, dus $v^{-1}v' \in sKs^{-1}$. Tevens $v, v' \in H$ want het zijn representanten van restklassen van $(H \cap sKs^{-1})$ *in* H. Daarom $v = v'$ want $v^{-1}v' \in H \cap sKs^{-1}$.

Zij dus $T_s = \{vs : v \in V_s\}$ en $T = \cup_{s \in S} T_s$. Deze vereniging is weer disjunct want als $vs = v's'$ voor een $v \in V_s$, $v' \in V_{s'}$, dan $HsK \cap Hs'K \supset vsK = v's'K$ wegens de voorgaande display, en omdat $H \backslash G / K$ een partitie is geldt $HsK = Hs'K$ dus $s = s'$ omdat S een representantensysteem van $H \backslash G / K$ is. Maar dan volgt uit $vs = v's$ gewoon $v = v'$.

Samen geeft dit

$$G = \bigcup_{s \in S} HsK = \bigcup_{s \in S} \bigcup_{v \in V_s} vsK = \bigcup_{s \in S} \bigcup_{t \in T_s} tK = \bigcup_{t \in T} tK$$

met alle verenigingen disjunct.

Dus volgt nu dat T ook wel een complete set van representanten voor G/K moet zijn.

Tenslotte:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_K^G f(h) &= \sum_{t \in T} \dot{f}(t^{-1}ht) \\ &= \sum_{s \in S} \sum_{t \in T_s} \dot{f}(t^{-1}ht) \\ &= \sum_{s \in S} \sum_{v \in V_s} \dot{f}(s^{-1}v^{-1}hvs) \end{aligned}$$

Nu zijn de niet-0 termen in deze som eigenlijk alleen die waarin $s^{-1}v^{-1}hvs \in K$, dus waarin $v^{-1}hv \in sKs^{-1}$, en voor die termen is $\dot{f}(s^{-1}v^{-1}hvs) = f(s^{-1}v^{-1}hvs) = f^s(v^{-1}hv)$.

Dus dit is:

$$... = \sum_{s \in S} \sum_{v \in V_s, v^{-1}hv \in sKs^{-1}} f^s(v^{-1}hv)$$

En aangezien $V_s \in H$, $v^{-1}hv \in H$ en dus gebeurt deze sommatie in principe alleen over termen $v^{-1}hv$ in H, dus we kunnen werken met de restrictie:

$$\begin{aligned}
\ldots &= \sum_{s\in S} \sum_{v\in V_s, v^{-1}hv\in H\cap sKs^{-1}} \operatorname{Res}^{sKs^{-1}}_{H\cap sKs^{-1}} f^s(v^{-1}hv) \\
&= \sum_{s\in S} \operatorname{Ind}^{H}_{H\cap sKs^{-1}} \operatorname{Res}^{sKs^{-1}}_{H\cap sKs^{-1}} f^s(v^{-1}hv)
\end{aligned}$$

Dat laatste weer omdat V_s een compleet representantensysteem van $H/(H\cap sKs^{-1})$ is.

- ***Stelling*** (*Mackey's Irreducibiliteitscriterium*) Zij $H \leq G$ en $\varphi : H \to GL_d(\mathbb{C})$ een representatie. Dan is Ind^G_H irreducibel alleen als

  (i) φ irreducibel is, en

  (ii) $\operatorname{Res}^{H}_{H\cap sHs^{-1}} \varphi$ en $\operatorname{Res}^{sHs^{-1}}_{H\cap sHs^{-1}} \varphi^s$ zijn disjunct, voor alle $s \in S^{\#}$ waar $S^{\#}$ een representantensysteem voor de restklassen in G/H zonder H is (voor $s \in H$ hoeven we het niet te controleren).

Hier definiëren we $\varphi^s(x) = \varphi(s^{-1}xs)$ voor alle $x \in sHs^{-1}$. φ^s is daarmee een representatie op $sHs^{-1} \leq G$.

Bewijs Zij χ het karakter van φ en S een representantensysteem voor $H\backslash G/H$. Neen z.v.v.a. aan dat $1 \in S$.

Dan voor $s = 1$ is $H \cap sHs^{-1} = H$, en $\varphi^s \in Z(L(sKs^{-1}))$ en is gewoon $\varphi^s = \varphi$. Zij $S^{\#} = S\backslash\{1\}$. Dan geeft Mackey's stelling dat

$$\operatorname{Res}^G_H \operatorname{Ind}^G_H \chi = \chi + \sum_{s\in S^{\#}} \operatorname{Ind}^{H}_{H\cap sHs^{-1}} \operatorname{Res}^{sHs^{-1}}_{H\cap sHs^{-1}} \chi^s$$

waarin we dus gebruiken $\operatorname{Ind}^{H}_{H\cap sHs^{-1}} \operatorname{Res}^{sHs^{-1}}_{H\cap sHs^{-1}} \chi^s = \operatorname{Ind}^H_H \operatorname{Res}^H_H \chi = \chi$ voor $s = 1$.

Daarna geeft Frobenius reciprociteit:

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{Ind}^G_H \chi, \operatorname{Ind}^G_H \chi\rangle &= \langle \operatorname{Res}^G_H \operatorname{Ind}^G_H \chi, \chi\rangle \\
&= \langle \chi, \chi\rangle + \sum_{s\in S^{\#}} \langle \operatorname{Ind}^{H}_{H\cap sHs^{-1}} \operatorname{Res}^{sHs^{-1}}_{H\cap sHs^{-1}} \chi^s, \chi\rangle \\
&= \langle \chi, \chi\rangle + \sum_{s\in S^{\#}} \langle \operatorname{Res}^{sHs^{-1}}_{H\cap sHs^{-1}} \chi^s, \operatorname{Res}^{H}_{H\cap sHs^{-1}} \chi\rangle
\end{aligned}$$

$\operatorname{Ind}^G_H \varphi$ heeft karakter $\operatorname{Ind}^G_H \chi$. Dit is een irreducibel karakter, d.e.s.d.a. $\langle \operatorname{Ind}^G_H \chi, \operatorname{Ind}^G_H \chi\rangle = 1$, en aangezien al geldt $\langle \chi, \chi\rangle \geq 1$, is dit alleen als $\langle \chi, \chi\rangle = 1$ ($\iff$ χ is irreducibel, (i)) en $\langle \operatorname{Res}^{sHs^{-1}}_{H\cap sHs^{-1}} \chi^s, \operatorname{Res}^{H}_{H\cap sHs^{-1}} \chi\rangle = 0$ voor alle $s \in S^{\#}$ ($\iff$ (ii))

- ***Corrolarium*** (*Toepassing op normale ondergroepen*) Als $H \trianglelefteq G$, dan voor $m = [G : H]$, $\varphi : H \to GL_d(\mathbb{C})$ een representatie, is $\varphi^G : G \to GL_{md}(\mathbb{C})$ zoals boven gedefinieerd, irreducibel d.e.s.d.a

  (i) φ irreducibel is;

  (ii) Voor een representantensysteem S van G/H geldt dat voor $S^{\#} = S \backslash H$, φ en $\varphi^s : H \to GL_d(\mathbb{C})$ disjunct zijn.

  Bewijs Omdat H normaal is, is $H \cap sHs^{-1} = sHs^{-1} = H$ voor elke $s \in S$. $\varphi^s : H \to GL_d(\mathbb{C})$ dus, en daarom $\mathrm{Res}^H_{H \cap sHs-1} \varphi = \varphi$, $\mathrm{Res}^{sHs^{-1}}_{H \cap sHs^{-1}} \varphi^s = \varphi$. Dus punt (ii) uit Mackey's criterium reduceert tot criterium (ii) boven.