Maattheorie

Matthijs Muis
s1066918

August 1, 2024

1.1

- Een *algebra* $\mathscr{A}$ op een verzameling X is een $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ met
  - $\emptyset \in \mathscr{A}$
  - $A_1, A_2 \in \mathscr{A} \implies A_1 \cup A_2 \in \mathscr{A}$
  - $A \in \mathscr{A}$ $A^c \in \mathscr{A}$.
- Een σ-*algebra* $\mathscr{A}$ op een verzameling X is een $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ met
  - $\emptyset \in \mathscr{A}$
  - $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A} \implies \cup_n A_n \in \mathscr{A}$
  - $A \in \mathscr{A}$ $A^c \in \mathscr{A}$.
- (1.1.2) Als $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(X)$ een verzameling σ-algebra's op X is, dan is $\cap\mathscr{S}$ een σ-algebra op X.

  Bewijs:

  Σ_1 $\forall\mathscr{A} \in \mathscr{S}$, $\emptyset \in \mathscr{A}$ want $\mathscr{A}$ is σ-algebra. Dus $\emptyset \in \cap_{\mathscr{A}\in\mathscr{A}}\mathscr{A}$.

  Σ_2 Als $A \in \cap\S$, dan $\forall\mathscr{A} \in \mathscr{S}$, $A \in \mathscr{A}$, dus $\forall\mathscr{A} \in \mathscr{S}$, $A^c \in \mathscr{A}$ want $\mathscr{A}$ is een σ-algebra. Dus $A^c \in \cap_{\mathscr{A}\in\mathscr{S}}$. Dus $A \in \cap\mathscr{S} \implies A^c \in \cap\mathscr{S}$.

  Σ_3 Als $\{A_n\}_n \subset \cap\mathscr{S}$, dan $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ $\forall\mathscr{A} \in \mathscr{S}$, dus $\cup_n A_n \in \mathscr{A}$ $\forall\mathscr{A} \in \mathscr{S}$, dus $\cup_n A_n \in \cap\mathscr{S}$, dus $\mathscr{S}$ is gesloten onder aftelbare vereniging.

  $\cap\mathscr{S}$ voldoet dus aan de axioma's van de σ-algebra.
- (1.1.3) Als $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, dan is er een "kleinste" σ-algebra op X die $\mathscr{F}$ bevat, $\sigma(\mathscr{F})$, in de zin dat als $\mathscr{A}$ een σ-algebra is met $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$, dan $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$.

  Bewijs:

  Zij $\mathscr{S} = \{\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X) \mid \mathscr{A}\ \sigma\text{-algebra},\ \mathscr{C} \subset \mathscr{A}\}$. Wegens 1.1.2 is $\cap\mathscr{S}$ een σ-algebra op X. Als $\mathscr{A}$ een σ-algebra op X is die $\mathscr{C}$ bevat, dan $\mathscr{A} \in \mathscr{S}$, dus $\cap\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$.

- De *Borel-σ-algebra* $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ is $\sigma(\mathscr{G})$ waarbij $\mathscr{G}$ de standaardtopologie op $\mathbb{R}^d$ is.
- (1.1.4) $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ wordt voortgebracht door
  - $\mathscr{F}$, alle gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.
  - alle intervalllen van de vorm $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$.
  - alle intervallen van de vorm $(a, b]$, $a < b$.
- (1.1.5) $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ wordt voortgebracht door
  - $\mathscr{F}$, alle gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{R}^d$.
  - alle halfruimten van de vorm$\{x \in \mathbb{R}^d \mid e^i x \leq b\}$.
  - alle rechthoeken van de vorm $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$
- Voor $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$:
  - $\mathscr{C}_\delta = \{\cap_{n=1}^\infty A_n \mid \forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathscr{C}\}$.
  - $\mathscr{C}_\sigma = \{\cup_{n=1}^\infty A_n \mid \forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathscr{C}\}$.
- (1.1.6) In $\mathbb{R}^d$ is elke $C \in \mathscr{F}$ een $\mathscr{G}_\delta$ en elke $U \in \mathscr{G}$ is een $\mathscr{F}_\sigma$. Dit geldt overigens voor elke 2^{nd} aftelbare T_4-ruimte.
- $\mathscr{C}_{\sigma\sigma} = \mathscr{C}_\sigma$, $\mathscr{C}_{\delta\delta} = \mathscr{C}_\delta$.
- (1.1.7) Als $\mathscr{A}$ een algebra op X is, dan is $\mathscr{A}$ een σ-algebra als:
  - voor alle $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ met $\forall n : A_n \subset A_{n+1}$, $\cup_n A_n \in \mathscr{A}$, of
  - voor alle $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ met $\forall n : A_n \supset A_{n+1}$, $\cap_n A_n \in \mathscr{A}$, of
  - voor alle $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ met $\forall n \neq m : A_n \cap A_m = \emptyset$, $\cup_n A_n \in \mathscr{A}$.

1.2

- Voor $(X, \mathscr{A})$ een meetbare ruimte heet $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$
  - een *eindige additivieve maat* als voor elke $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ disjunct, $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$, en $\mu(\emptyset) = 0$.
  - een (σ*-additieve*) *maat* als voor elke aftelbare paarsgewijs disjuncte collectie $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ geldt $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$, en $\mu(\emptyset) = 0$.

  $(X, \mathscr{A}, \mu)$ heet een *maatruimte*.
- Een maat μ heet:
  - *eindig* als $\mu(X) < \infty$. Dat betekent dat μ begrensd is op $\mathscr{A}$.
  - σ*-eindig* als $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ met $\forall n : \mu(X_n) < \infty$.
- (1.2.2) $\forall A, B \in \mathscr{A}$:

  - $B \subset A$, dan $\mu(B) \leq \mu(A)$.
  - $B \subset A$, $\mu(A) < \infty$, dan $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B)$.

- (1.2.4) $\forall \{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$: $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.
- (1.2.5) Als μ een maat is, dan:
  - voor $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ stijgend, geldt $\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.
  - voor $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ dalend met $\exists N \in \mathbb{N} : \mu(A_N) < \infty$, geldt $\lim_n \mu(A_n) = 0$.
- (1.2.6) Als μ een eindig additieve maat is, dan is μ een maat als:
  - voor $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ stijgend, geldt $\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$, of als
  - voor $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ dalend met $\cap_n A_n = \emptyset$, $\lim_n \mu(A_n) = 0$.

  Bewijs:

  Voor $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ disjunct, definieer:
  - $B_n = \cup_{m \leq n} A_m$, dan is $\{B_n\}$ stijgend en $\cup_n B_n = \cup_n A_n$, dus $\mu(\cup_n A_n) = \mu(\cup_n B_n) = \lim_n \mu(B_n) = \lim_n \sum_{m \leq n} \mu(A_m) = \sum_n \mu(A_n)$.
  - $B_n = \cup_{m > n} A_m$. Dan $A_1 \cup ... \cup A_n \cup B_n = \cup_n A_n$, dus eindige additiviteit geeft: $\forall n : \mu(B_n) + \sum_{m \leq n} \mu(A_n) = \mu(\cup_n A_n)$. Verder is $\{B_n\}_n$ dalend en $\cap_n B_n = \emptyset$, dus nemen we de limiet $n \to \infty$ dan staat er $0 + \sum_n \mu(A_n) = \mu(\cup_n A_n)$.

1.3

- $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ heet een *buitenmaat* op X als
  - $\mu^*(\emptyset) = 0$.
  - $A \subset B$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
  - $\{A_n\}_n \subset \mathscr{P}(X) : \mu^*(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$
- Voor $R = \prod_i^n (a_i, b_i)$ een open rechthoek, $\text{vol}(R) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$.
- De *Lebesgue buitenmaat* λ^* op $\mathbb{R}^d$ is:

  $$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_n \text{vol}(Q_n) \mid \{Q_n\}_n \text{ aftelbare cover van } A \text{ in open kubussen}\}$$

- (1.3.4) λ^* op $\mathbb{R}^d$ is een buitenmaat en $\lambda^*(R) = \text{vol}(R)$ voor elke rechthoek $R \subset \mathbb{R}^d$.
- $B \subset X$ heet μ^*-meetbaar als $\forall F \subset X : \mu(F) = \mu^*(F \cap B) + \mu^*(F \backslash B)$. De μ^*-meetbare verzamelingen noteren we $\mathscr{M}_{\mu^*}$.

- (1.3.5) Als μ^* een buitenmaat op X is, dan $\mu(B) = 0$ of $\mu(B^c) = 0$ impliceert $B \in \mathscr{M}_{\mu^*}$

- (1.3.6)
  - $\mathscr{M}_{\mu^*}$ is een σ-algebra op X.
  - Als μ de restrictie van μ^* tot $\mathscr{M}_{\mu^*}$ is, dan is μ een maat.

  Bewijs:

  Ten eerste is $\mathscr{M}_{\mu^*}$ een algebra:

  α_1 $\mu^*(\emptyset) = 0$, dus $\emptyset \in \mathscr{M}_{\mu^*}$

  α_2 Als $A \in \mathscr{M}_{\mu^*}$, dan $\forall C \subset X : \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap C^c) = \mu^*(C)$ dus $\forall C \subset X : \mu^*(C \cap (A^c)) + \mu^*(C \cap (A^c)^c) = \mu^*(C)$, dus $A^c \in \mathscr{M}_{\mu^*}$.

  α_3 Als $A_1, A_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$, dan $\forall C \subset X : \mu^*(C \cap A_i^c) + \mu^*(C \cap A_i) = \mu^*(C)$, $i = 1, 2$, dus

  $$\begin{aligned}
  \mu^*(C \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu^*(C \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*(C \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) \\
  &= \mu^*(C \cap A_1) + \mu(C \cap A_1^c \cap A_2) \implies \\
  \mu^*(C) &= \mu^*(C \cap A_1) + \mu(C \cap A_1^c) \\
  &= \mu^*(C \cap A_1) + \mu(C \cap A_1^c \cap A_2) + \mu^*(C \cap A_1^c \cap A_2^c) \\
  &= \mu^*(C \cap (A_1 \cup A_2) + \mu^*(C \cap (A_1 \cup A_2)^c)
  \end{aligned}$$

  Dus $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$.

  Tenslotte tonen we aan dat $\mathscr{M}_{\mu^*}$ gesloten is onder disjuncte vereniging. Zij $\{B_n\}_n \subset \mathscr{M}_{\mu^*}$ paarsgewijs disjunct en $C \subset X$.

  $$\begin{aligned}
  \mu^*(C \cap (\cap_{m=1}^n B_m^c)) &= \mu^*(C \cap (\cap_{m=1}^n B_m^c) \cap B_{n+1}) + \mu^*(C \cap (\cap_{m=1}^n B_m^c) \cap B_{n+1}^c) \\
  &= \mu^*(C \cap B_{n+1}) + \mu^*(C \cap (\cap_{m=1}^{n+1} B_m^c))
  \end{aligned}$$

  Dus volgt met inductie naar n dat $\mu^*(C) = \sum_{i=1}^n \mu^*(C \cap B_i) + \mu^*(C \cap (\cap_{i=1}^n B_i^c))$, want

  IB $\mu^*(C) = \mu^*(C \cap B_1) + \mu^*(C \cap B_1^c)$

  IS

  $$\begin{aligned}
  \mu^*(C) &= \sum_{i=1}^n \mu^*(C \cap B_i) + \mu^*(C \cap (\cap_{i=1}^n B_i^c)) \\
  &= \sum_{i=1}^n \mu^*(C \cap B_i) + \mu^*(C \cap B_{n+1}) + \mu^*(C \cap (\cap_{i=1}^{n+1} B_i^c)) \\
  &= \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(C \cap B_i) + \mu^*(C \cap (\cap_{i=1}^{n+1} B_i^c))
  \end{aligned}$$

Omdat $\mu^*(\cap_{i=1}^{\infty} B_i^c) \leq \mu^*(\cap_{i=1}^{n} B_i^c)$ voor elke n, hebben we voor elke n dat:

$$\mu^*(C) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(C \cap B_i) + \mu^*(C \cap (\cap_{i=1}^{\infty} B_i))$$

Dus de limiet $n \to \infty$ geeft:

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(C \cap B_i) + \mu^*(C \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i)^c) \\ &\geq \mu^*(C \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i)) + \mu^*(C \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i)^c)\end{aligned}$$

De ongelijkheid $\mu^*(C) \leq \mu^*(C \cap (\cup_n B_n)) + \mu^*(C \cap (\cup_n B_n)^c)$ volgt uit subadditiviteit, dus er volgt gelijkheid:

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap (\cup_n B_n)) + \mu^*(C \cap (\cup_n B_n)^c) = \sum_n \mu^*(B_n) + \mu^*(C \cap (\cap_n B_n^c))$$

De eerste gelijkheid, voor willekeurige $C \subset X$, laat zien $\cup_n B_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ voor $\{B_n\} \subset \mathscr{M}_{\mu^*}$ een willekeurige disjuncte rij. $\mathscr{M}_{\mu^*}$ is daarnaast reeds een algebra, dus samen maakt dit een σ-algebra.

Vervolgens laten we zien dat μ^* een maat is op $\mathscr{M}_{\mu^*}$. Dat $\mu^*(\emptyset) = 0$ is wegens de definitie van de buitenmaat. Met het voorgaande argument zagen we dat er gelijkheid gold in

$$\mu^*(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(C \cap B_i) + \mu^*(C \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i),$$

Wanneer $\{B_n\}_n$ een disjuncte rij in $\mathscr{M}_{\mu^*}$ is. Nemen we $C = \cup_n B_n$, dan zien we dat geldt

$$\begin{aligned}\mu^*(\cup_i B_i) &= \sum_n \mu^*((\cup_i B_i) \cap B_n) + \mu^*((\cup_i B_i) \cap (\cup_i B_i)^c) \\ &= \sum_n \mu^*(B_n) + \mu^*(\emptyset) \\ &= \sum_n \mu^*(B_n)\end{aligned}$$

Dus μ^* is σ-additief op $\mathscr{M}_{\mu^*}$. Dus $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ is een maatruimte.

- (1.3.8) $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{M}_{\lambda^*}$.
- (1.3.9) Als μ een eindige maat op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ is, dan $F(t) = \mu((-\infty, t])$ is rechts-continu, $\lim_{t\to\infty} F(t) < \infty$ en $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$.
- (1.3.10) Als $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rechts-continu is met $\lim_{t\to\infty} F(t) < \infty$ en $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, dan is er een unieke maat μ op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ met $\forall t \in \mathbb{R} : \mu((-\infty, t]) = F(t)$

1.4

- (1.4.1) De Lebesgue-maat is *regulier*:
  - $\lambda(A) = \inf\{\lambda(C) \mid C \in \mathscr{F},\ A \subset C\}$.
  - $\lambda(A) = \sup\{\lambda(U) \mid U \in \mathscr{G},\ U \subset A\}$
- (1.4.2) Voor $\mathbb{R}^d$ is elke $U \in \mathscr{G}$ een aftelbare vereniging van kubussen van de vorm $\prod_{n=1}^{d}[j_n 2^{-k}, (j_n+1)2^{-k})$
- (1.4.3) De lebesgue maat is de enige maat μ op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ zodat voor elke d-dimensionale rechthoek R, $\text{vol}(R) = \mu(R)$ geldt.
- $\forall A \subset \mathbb{R}^d$, $\forall x \in \mathbb{R}^d : \lambda^*(A+x) = \lambda^*(A)$. λ heet *translatie-invariant* (Op algemene topologische groepen heet dit: Haar)

  Bewijs:

  Aangezien $\text{vol}(Q+x) = r^d = \text{vol}(Q)$ geldt voor Q een kubus met zijdelengte r, $Q \subset \mathbb{R}^d$, volgt dat er een kubus-overdekking $\{Q_i\}_i$ met volume $v = \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(Q_i)$ van $A \subset \mathbb{R}^d$ bestaat, $\iff$ er ee kubus-overdekking met volume v, namelijk $\{Q_i + x\}_i$, van $A + x$ bestaat. Er volgt dus dat:

  $$\{\sum_n \text{vol}(Q_n) \mid \{Q_n\}_n\ \omega\text{-kubusoverdekking van } A\} =$$
  $$\{\sum_n \text{vol}(Q_n) \mid \{Q_n\}_n\ \omega\text{-kubusoverdekking van } A + x\}$$

  En $\lambda^*(A)$ is het inf van links, $\lambda^*(A+x)$ is het inf van rechts.
- (1.4.5) Als μ een niet-0-maat op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ is die eindig is op de begrensde Borelverzamelingen en tranlatie-invariant, dan $\mu = c\lambda$ voor een $c \in \mathbb{R}$.
- (1.4.6) De *Cantor-verzameling* $C = \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \mid a_i \in \{0, 2\}\}$ is compact, heeft cardinaliteit 2^ω en $\lambda(C) = 0$.
- (1.4.7) De *Vitali-verzameling*:
  - Bekijk de quotientgroep $\mathbb{R}^+/\mathbb{Q}^+$, en zij $E \subset (0,1)$ een representantensysteem voor de klassen.
  - Zij $\{r_n\}_n = \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$
  - Zij $E_n = E + r_n$ en $V = \cup_n E_n$.

  Als $V \in \mathscr{M}_{\lambda^*}$, dan volgt een tegenspraak, namelijk:
  - $(0,1) \subset V \subset (-1,2)$, dus $1 \le \lambda^*(V) \le 3$.
  - Voor λ: σ-additiviteit, dus $\lambda(V) = \sum_n \lambda(E_n) = \sum_n \lambda(E) \in \{0, \infty\}$.

1.5

- μ heet *compleet* als $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) = 0$, $B \subset A$ impliceert $B \in \mathscr{A}$
- $B \subset A$ met $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) = 0$ heet *μ-verwaarloosbaar/μ-null.*
- Als μ^* een buitenmaat is en $\mathscr{M}_{\mu^*}$ de μ^*-meetbare verzamelingen, dan is $\mu = \mu^*|_{\mathscr{M}_{\mu^*}}$ compleet op μ^* (want $\mu(B) = 0$ of $\mu(B^c) = 0$ impliceert $B \in \mathscr{M}_{\mu^*}$).
- Voor $(X, \mathscr{A}, \mu)$ een maatruimte, is de *vervollediging* $\mathscr{A}_\mu$:

  $$\mathscr{A}_\mu = \{A \subset X \mid \exists F, E \in \mathscr{A} : E \subset F, \mu(F \backslash E) = 0\}$$

  Niet: $\mu(F) = \mu(E)$, dat is te zwak: bijvoorbeeld $\lambda([0, \infty)) = \lambda(\mathbb{R}) = \infty$ maar $(-\infty, 0)$ is niet λ-null.

  $\mathscr{A}_\mu$ is een σ-algebra. Echter als μ en ν maten op $\mathscr{A}$ zijn, dan hoeven $\mathscr{A}_\mu$ en $\mathscr{A}_\nu$ niet gelijk te zijn.
- De *vervollediging* van μ is $\overline{\mu} : \mathscr{A}_\mu \to [0, \infty)$ door $\overline{\mu}(A) := \mu(E) = \mu(F)$.
- (1.5.1) $\overline{\mu}$ is een maat op $\mathscr{A}_\mu$ met $\overline{\mu}|_{\mathscr{A}} = \mu$.
- Voor $(X, \mathscr{A}, \mu)$ een maatruimte, definieer
  - $\mu^*(A) = \inf\{\mu(F) \mid A \subset F, F \in \mathscr{A}\}$
  - $\mu_*(A) = \sup\{\mu(E) \mid E \subset A, E \in \mathscr{A}\}$
- (1.5.4) μ^* is een buitenmaat op X.
- (1.5.5) Voor μ een maat op $((X, \mathscr{A})$, als $\mu^*(A) < \infty$, dan $\mu^*(A) = \mu_*(A) \iff A \in \mathscr{A}_\mu$. In het bijzonder:
  - $\overline{\mu}(A) = \inf\{\mu(F) \mid A \subset F, F \in \mathscr{A}\}$
  - $\overline{\mu}(A) = \sup\{\mu(E) \mid E \subset A, E \in \mathscr{A}\}$
- Voor $(X, \mathscr{G})$ een topologische ruimte en $\mathscr{B}(X)$ de Borel-σ-algebra $\sigma(\mathscr{G})$ heet een maat μ op $(X, \mathscr{B}(\mathscr{G}))$ *regulier* als
  - $\mu(K) < \infty$ voor $K \subset X$ compact.
  - $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \in \mathscr{G}\}$, voor elke $A \in \mathscr{A}$.
  - $\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset U, K \text{ compact}\}$, voor elke open $U \in \mathscr{G}$:
- (1.5.6) Voor μ eindig op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, dan is μ regulier, en bovendien

  $$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ compact}\}$$

- (1.5.7) (lemma) Voor μ eindig op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, geldt

  $$\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset A, C \in \mathscr{F}\}$$

1.6

- $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(X)$ heet een *Dynkin-klasse* of d*-systeem* op X als:
  - $X \in \mathscr{D}$.
  - $A, B \in \mathscr{D}$, $A \subset B \implies B \backslash A \in \mathscr{D}$.
  - $\{A_n\}_n \subset \mathscr{D}$ stijgend $\implies \cup_n A_n \in \mathscr{D}$.

  Het derde axioma kan verwisseld worden voor:

  - $\{A_n\}_n \subset \mathscr{D}$ paarsgewijs disjunct $\implies \cup_n A_n \in \mathscr{D}$.
- Als $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(X)$ een verzameling d-systemen op X is, dan is $\cap \mathscr{S}$ een d-systeem op X. Voor $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ is er dus een kleinste d-systeem dan $\mathscr{C}$ bevat, $d(\mathscr{C})$.
- Een π-systeem $\mathscr{P}$ op X is $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}(X)$.
  - $A_1, A_2 \in \mathscr{P} \implies A_1 \cap A_2 \in \mathscr{P}$.
- (1.6.1) Als $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ een π-systeem is, dan $\sigma(\mathscr{C}) = d(\mathscr{C})$.
- Als μ, ν eindige maten zijn op $(X, \mathscr{A})$ met $\mu(X) = \nu(X)$, dan is $\{A \in \mathscr{A} \mid \mu(A) = \nu(A)\}$ een d-systeem.
- (1.6.3) Als μ, ν eindige maten op $(X, \mathscr{A})$ zijn met $\mu|_{\mathscr{C}} = \nu|_{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}$ een π-systeem dat $\mathscr{A}$ genereert, dan $\mu = \nu$.
- (1.6.4) Als μ, ν σ-eindige maten op $(X, \mathscr{A})$ zijn met $\mu|_{\mathscr{C}} = \nu|_{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}$ een π-systeem dat $\mathscr{A}$ genereert, en $C_n \uparrow X$ met $\{C_n\}_n \subset \mathscr{A}$ en $\forall n : \mu(C_n) < \infty$, dan $\mu = \nu$.

2.1

- (2.1.1) T.F.A.E. voor een $(X, \mathscr{A})$ een meetbare ruimte en $A \in \mathscr{A}$ en $f : X \to [-\infty, \infty]$:
  - $\forall t \in \mathbb{R} : \{x \in A : f(x) < t\} \in \mathscr{A}$
  - $\forall t \in \mathbb{R} : \{x \in A : f(x) \leq t\} \in \mathscr{A}$
  - $\forall t \in \mathbb{R} : \{x \in A : f(x) > t\} \in \mathscr{A}$
  - $\forall t \in \mathbb{R} : \{x \in A : f(x) \geq t\} \in \mathscr{A}$

  (2.1.9)

  - $\forall C \in \mathscr{F} : f^{-1}(C) \in \mathscr{A}$
  - $\forall U \in \mathscr{G} : f^{-1}(U) \in \mathscr{A}$
  - $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$

Als één (of equivalent alle) voorwaarde(n) geldt(en), dan heet f *meetbaar* $(X, \mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ of preciezer, meetbaar $(X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

- (2.1.2) Monotone functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn meetbaar, continue functies $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zijn meetbaar. I.h.a. als f continu $(X, \mathscr{G}) \to \mathbb{R}$ is dan is f $\mathscr{B}(X)$-meetbaar.
- Als $g, f : X \to [-\infty, \infty]$ $\mathscr{A}$-meetbaar zijn, dan
  - (2.1.3) $\{f < g\},\ \{f \leq g\}, \{f = g\} \in \mathscr{A}$
  - (2.1.5) $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_n f_n, \liminf_n f_n$ zijn $\mathscr{A}$-meetbaar, waar $\{f_n\}_n$ een *aftelbare rij* van $\mathscr{A}$-meetbare functies.
  - (2.1.5) $\lim_n f_n$ met domein $\{\limsup_n f_n = \liminf_n f_n\}$ is $\mathscr{A}$-measurable.
  - (2.1.7) $f + g, f - g, \alpha f, fg, \frac{f}{g}$ zijn $\mathscr{A}$-meetbaar waar $\frac{f}{g}$ domein $\{g \neq 0\} \subset X$ heeft.
- $f : X \to [-\infty, \infty]$ is *simple* if its range is finite. A simple function is measurable $\iff$ $f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$ for $A_1, ..., A_N$ a finite partition of X into $\mathscr{A}$-measurable sets.
- Every $x \in [0, 1]$ admits a ternary expansion $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, $a_i \in \{0, 1, 2\}$. Such an expansion is not unique: $\sum_{i=m}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^{m-1}}$.
- The *Cantor set* is $\cap_{i=1}^{\infty} C_i$, where $C_0 = 1$ and C_i is obtained from C_{i-1} by deleting the middle third open interval from each consecutive interval of C_{i-1}. C_n consists of 2^n closed intervals of length 3^{-n}. Alternatively, $C = \{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \mid a_i \in \{0, 2\}, \forall i\}$. The Cantor set here inherits the subspace topology from the Euclidean topology on $[0, 1]$.
- (Properties of the Cantor set)
  - C is compact.
  - C does not contain any open interval (a, b) with $a < b$.
  - $C^o = \emptyset$, C is nowhere dense, and C is totally disconnected.
- For elements $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, $y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$ with $\forall i,\ a_i, b_i \in \{0, 2\}$:
  - If $\forall 1 \leq i \leq m\ a_i = b_i$, then $|x - y| \leq 3^{-m}$.
  - If additionally $a_{m+1} \neq b_{m+1}$, then $|x - y| \geq 3^{-(m+1)}$.
  - If $|x - y| < 3^{-m}$, then $\forall 1 \leq i \leq m\ a_i = b_i$
  - If $x = y$ then $\forall i \geq 1\ a_i = b_i$

  So every $x \in C$ has a unique ternary expansion in digits $a_i \in \{0, 2\}$.
- Definieer $f : C \to [0, 1]$ door $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2} \frac{1}{2^i}$, en $f(x) = \sup_{y \leq x, y \in C} f(y)$ voor $x \notin C$. Dan is f continu $[0, 1] \to [0, 1]$ en monotoon. Uit surjectiviteit en de tussenwaardestelling, $\forall y \in [0, 1] : \exists x \in [0, 1] f(x) = y$, dus laat $g(y) = \inf f^{-1}(\{y\})$ zijn. Wegens rechts-continuiteit van f is $f(g(y)) = y$ dus g is injectief. Bovendien $g([0, 1]) \subset C$ en g is monotoon, dus meetbaar $([0, 1], \mathscr{B}([0, 1])) \to ([0, 1], \mathscr{B}([0, 1]))$

- Laat $A \subset [0,1]$ een niet-λ^*-meetbare verzameling zijn. en $B = g(A)$. $B \subset C$ en met $\lambda^*(C) = 0$ volgt dat $B \in \mathscr{M}_{\lambda^*}$, want $\mathscr{M}_{\lambda^*}$ is compleet. Als B Borel was, dan was $g^{-1}(B)$ dat ook. Maar g is injectief, dus $g^{-1}(B) = g^{-1}g(A) = A$, en $A \notin \mathscr{M}_{\lambda^*}$ dus $A \notin \mathscr{B}([0,1])$. Dus $\mathscr{B}$ is niet Borel, maar wel Lebesgue-meetbaar.
- In het bijzonder is $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ niet compleet.
- (2.1.8) (*Benadering met $\mathscr{A}$-simpele functies*) Als $f : X \to [0,\infty]$ $\mathscr{A}$-meetbaar is, dan is er een rij $f_n : X \to [0,\infty)$ met $f_n \leq f_{n+1}$ overal op X en $f = \lim_n f_n$ puntsgewijs.

  Bewijs:

  Namelijk, $f_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{A_{n,i}}$ met $A_{n,i} = \{x \in X \mid f(x) \in [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{n})\}$.

2.2

- Een uitspraak $\varphi(x)$ met x de enige vrije variabele uit het domein X geldt *μ-bijna overal* als $\{x \in X \mid \varphi(x)\}^c$ μ-null is.
- (2.2.2) Als $(, \mathscr{A}, \mu)$ *compleet* is en $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ met $g(x) = f(x)$ μ-a.e en f is $\mathscr{A}$-meetbaar, dan is g $\mathscr{A}$-meetbaar.
- (2.2.3) Als $(X, \mathscr{A}, \mu)$ een *complete* maatruimte is met $\{f_n : X \to [-\infty, \infty]\}_n$ een rij $\mathscr{A}$-meetbare functies en $f : X \to [-\infty, \infty]$ zodat $\lim_n f_n = f$ μ-a.e., dan is f $\mathscr{A}$-meetbaar.
- (2.2.5) Zij $(X, \mathscr{A}, \mu)$ maatruimte en $\mathscr{A}_\mu$ de vervollediging van $\mathscr{A}$ onder μ. Als $f : X \to [-\infty, \infty]$ dan f is $\mathscr{A}_\mu$-meetbaar $\iff$
  $\exists f_0, f_1 : X \to [-\infty, \infty]$ met $f_0 = f_1$ μ-a.e. en $f_0 \leq f \leq f_1$ μ-a.e.

2.3

- De *integraal* van een simpele $\mathscr{A}$-meetbare functie $f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$, $f : X \to [-\infty, \infty]$, $A_1, ..., A_N$ z.v.v.a. disjunct en $\mathscr{A}$-meetbaar, is gedefinieerd als $\sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i)$
- De integraal is hiermee weldgedefinieerd (onafhankelijk van de partitiekeuze), want als ook $f = \sum_{i=1}^K b_i \chi_{B_i}$, dan $a_i = b_j$ als $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, dus

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^N \sum_{i=1} a_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{i=1} b_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1} b_j \mu(B_j)\end{aligned}$$

Hier gebruiken we $\mu(A_i \cap B_j) = 0$ voor $A_i \cap B_j = \emptyset$, en eindige additiviteit voor de partities $\{A_i \cap B_i\}_j$ voor A_i en $\{A_i \cap B_i\}_i$ voor B_j.

- (2.3.1) Voor $f : X \to [0, \infty]$ simpel $\mathscr{A}$-meetbaar, gelden:
  - $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$, voor $\alpha \geq 0$.
  - $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$
  - $f \leq g$ overal, dan $\int f d\mu \leq g d\mu$.
- (2.3.2) Als $f_n, f : X \to [0, \infty]$ simpel $\mathscr{A}$-meetbaar $\forall n$, en $\lim_n f_n = f$ overal op X, en $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n$, dan $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$.
- De algemene *integraal* is gedefinieerd als

$$\int f d\mu = \sup\{\int h d\mu \mid h \text{ simpel } \mathscr{A}\text{-meetbaar}, h \leq f\}$$

- (2.3.3) Als $f : X \to [0, \infty]$ $\mathscr{A}$-meetbaar is en $\{f_n : X \to [0, \infty]\}_n$ zijn simpel niet-negatief $\mathscr{A}$-meetbaar en $f_n \leq f_{n+1}$, overal, en $f_n \to f$ overal, $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$.
- Als $f, g : X \to [0, \infty]$ $\mathscr{A}$-meetbaar zijn en $\alpha \geq 0$, dan:
  - $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$, voor $\alpha \geq 0$.
  - $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$
  - $f \leq g$ overal, dan $\int f d\mu \leq g d\mu$.
- Als $f : X \to [-\infty, \infty]$ dan definiëren we $f^+ = \max\{0, f\}$ en $f^- = \min\{0, f\}$, zodat $f = f^+ - f^-$. Als $\int f^+ d\mu < \infty$ of $\int f^- d\mu < \infty$, zeggen we dat de integraal bestaat en definiëren we

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

- $f : X \to [-\infty, \infty]$, $\mathscr{A}$-meetbaar, heet *integreerbaar* als één van de volgende equivalente condities houdt:
  - $\int f d\mu$ bestaat en $-\infty < \int f d\mu < \infty$.
  - $\int f^+ d\mu < \infty$ en $\int f^- d\mu < \infty$.
  - (2.3.8) $\int |f| d\mu < \infty$.
- Als $f_1, f_2, g_1, g_2 : X \to [0\infty)$, integreerbaar, en $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, dan $\int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu = \int g_1 d\mu - \int g_2 d\mu$.
- Als $f, g : X \to [0, \infty]$ integreerbaar zijn en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan:
  - αf en $f + g$ zijn integreerbaar
  - $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$, voor $\alpha \geq 0$.

- $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$
- $f \leq g$ overal, dan $\int f d\mu \leq g d\mu$.

- Als $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ $\mathscr{A}$-meetbaar zijn met $f = g$ μ-a.e. en $\int f d\mu$ bestaat, dan bestaat $\int f d\mu = \int g d\mu$

- (2.3.10) (*Ongelijkheid van Chebyshev*) Als $f : X \to [0\infty]$ $\mathscr{A}$-meetbaar is en $t \geq 0$, dan $\mu(\{f \geq t\}) \leq \int_{\{f \leq t\}} f d\mu \leq \frac{1}{t} \int f d\mu$

  Bewijs:

  Zij $A = \{f \geq t\})$. Dan $t \cdot \chi_A \leq \chi_A \cdot f \leq f$, want $f \geq 0$. Dat geeft $\int t\chi_A d\mu \leq \int \chi_A f d\mu \leq f d\mu$. Delen door $t > 0$ geeft de vereiste ongelijkheid.

- Als $f : X \to [-\infty, \infty]$ integreerbaar is, dan is $\{f \neq 0\}$ σ-eindig onder μ.

- Als $\int |f| d\mu = 0$ dan $f = 0$ μ-a.e.

- $f : X \to [-\infty, \infty]$ en $\int_A f d\mu \geq 0$ $\forall A \in \mathscr{A}$, of zelfs slechts $\forall A \in \sigma(f)$. dan $f \geq 0$ μ-a.e.

- Als $f : X \to [-\infty, \infty]$ en f integreerbaar, dan $|f| < \infty$ μ-a.e.

- $f : X \to [-\infty, \infty]$ is integreerbaar $\iff$ er is een $g : X \to \mathbb{R}$ integreerbaar met $g = f$ μ-a.e.

2.4

- (2.4.1) (*Monotone Convergentiestelling*) Als $f, f_1, f_2, ... : X \to [0\infty]$ $\mathscr{A}$-meetbaar en $f_n \leq f_{n+1}$ voor μ-a.e. $x \in X$ en alle $n \in \mathbb{N}$ en $f(x) = \lim_n f_n(x)$ voor μ-a.e. $x \in X$, dan

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$$

  Bewijs:

  Het bewijs voor simpele functies wordt gegeven in 2.3.2. Voor de volledigheid geven we het bewijs volgens de bekend stappen (1) $f \in \mathscr{S}^+$, (2) $f : X \to [0, \infty]$ $\mathscr{A}$-meetbaar.

  (1) Zij $f : X \to [0, \infty)$ (niet $\infty \in f(X)$!) een simpele, niet-negatieve, $\mathscr{A}$-meetbare functies $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ met $A_1, ..., A_k$ z.v.v.a. disjuncte $\mathscr{A}$-meetbare verzamelingen.
  Wegens $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq ... \leq f$ μ-a.e. geldt $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ $\forall n \in \mathbb{N}$, en tevens is $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ een stijgende rij in $\mathbb{R}$, dus gaat naar ∞ of naar een eindige limiet.
  Voor $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, ..., k\}$, definieer $A_{n,i} = \{x \in X \mid f_n(x) \geq (1 - \varepsilon) a_i\}$. Dan is $\{A_{n,i}\}_n$ een stijgende rij in n voor elke

$i \in \{1, ..., k\}$, wegens monotoniciteit van f_n. Omdat $f(x) < \infty$ volgt tevens dat $\cup_n A_{n,i} = A_i$ voor alle $i \in \{1, ..., k\}$. Definieer $A_n = \cup i = 1^k A_{n,i}$, $g_n = (1-\varepsilon) f \chi_{A_n} = \sum_{i=1}^k (1-\varepsilon) a_i \chi_{A_{n,i}}$. Dan $g_n \leq f_n \leq f$, en $\lim_n \int g_n d\mu = \lim_n \sum_{i=1}^k (1-\varepsilon) a_i \mu(A_{n,i}) = \sum_{i=1}^k (1-\varepsilon) a_i \lim_n \mu(A_{n,i}) = \sum_{i=1}^k (1-\varepsilon) a_i \mu(A_n) = (1-\varepsilon) \int f d\mu$. Dus wegens $f_n \geq g_n$, $\lim_n \int f_n d\mu$ bestaat, volgt

$$\lim_n \int f_n d\mu \geq \lim_n \int g_n d\mu = (1-\varepsilon) \int f d\mu$$

Als $\int f d\mu = \infty$, dan zien we dat volgt $\lim_n \int f_n d\mu = \infty = \int f d\mu$. Als $\int f d\mu = L < \infty$, dan zien we $(1-\varepsilon)L \leq \lim_n \int f_n d\mu \leq L$, dit voor willekeurige $\varepsilon > 0$, dys ook voor $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{L}$, dus $|\lim_n f_n d\mu - \int f d\mu| \leq \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, dus $\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

(2) Zij f nu $\mathscr{A}$-meetbaar en $[0, \infty]$-waardig. Aangezien $f_1 \leq f_2 \leq ...$ μ-a.e. geldt dat de reëelwaardige rij

$$\int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq ...$$

Dus deze divergeert ofwel naar ∞ of naar een getal (als de rij begrensd is).

Bovendien wegens $f_n \leq f$ $\forall n$, μ-a.e. geldt $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$, dus de limiet nemen levert $\lim_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. In het geval dat $\int f_n d\mu$ divergeert naar ∞ geeft dat $\int f d\mu = \infty = \lim_n \int f_n d\mu$ en zijn we al klaar.

Laat $g_{n,k}$ een rij $[0, \infty)$-waardige simpele $\mathscr{A}$-meetbare functies zijn met $g_{n,k} \to f_n$ voor $k \to \infty$.

Dan $h_n = \max\{g_{1,k}, ..., g_{n,k}\} \leq f_n$ en is simpel en $\mathscr{A}$-meetbaar. Bovendien $\lim_n h_n = f$, dus wegens de eerdere stelling van monotone convergentie voor simpele functies geldt

$$\int f d\mu = \lim_n \int h_n d\mu \leq \lim_n \int f_n d\mu$$

En hieruit volgt gelijkheid.

- (2.4.2) (*Beppo-Levi*) Als $f_n : X \to [0, \infty]$ $\mathscr{A}$ meetbaar $\forall n \in \mathbb{N}$, dan

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n d\mu$$

- (2.4.4) (*Fatou's Lemma*) Als $\{f_n : X \to [0, \infty]$ rij f_n $\mathscr{A}$-meetbaar. Dan

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Bewijs:

Dit volgt met monotone convergentie: $\inf_{k\geq n} f_k \leq f_n$ en $\inf_{k\geq n} f_k$ is een puntsgewijs monotone rij met limiet $\liminf_n f_n$, dus $\lim_n \int \inf_{k\geq n} f_k d\mu = \int \liminf_n f_n d\mu$.

Voor elke $m \geq n$ volgt ook $f_m \geq \inf_{k\geq n} f_k$, dus $\int f_m d\mu \geq \int \inf_{k\geq n} f_k d\mu$, dus $\inf_{m\geq n} \int f_m d\mu \geq \int \inf_{k\geq n} d\mu$. De limiet links bestaat (de $\liminf$) en rechts ook (wegens bovenstaande monotone convergentie), dus

$$\liminf_n \int f_n d\mu \geq \lim_n \int \inf_{k\geq n} f_k d\mu = \int \liminf_n f_n d\mu$$

- (2.4.5) (*Gedomineerde Convergentiestelling*)

  Als $f : X \to [-\infty, \infty]$ $\mathscr{A}$-meetbaar is en $\{f_n : X \to [-\infty, \infty]\}$ een rij $\mathscr{A}$-meetbare functies, met $f_n \to f$ puntsgewijs en een $g : X \to [0, \infty)$ μ-integreerbaar met $|f_n| \leq g$ μ-a.e. $\forall n \in \mathbb{N}$. Dan f, $f_1, f_2, ...$ zijn integreerbaar en

  $$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$$

  Bewijs:

  Ten eerste $|f| = \lim_n |f_n| \leq g$ en er volgt integreerbaarheid van f_n en f omdat $\int |f| d\mu \leq \int g d\mu < \infty$ en $\int |f_n| d\mu \leq \int g d\mu < \infty$.

  De truc is Fatou: $g - f_n \geq 0$ μ-a.e. en $g + f_n \geq 0$ μ-a.e. en deze functies zijn nu integreerbaar, evenals $g - f \geq 0$ en $g + f \geq 0$ (μ-a.e.), en er geldt $g \pm f_n \to g \pm f$ als $n \to \infty$. Dus

  - Enerzijds:

  $$\begin{aligned}\int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g - f) d\mu \\ &= \int \liminf_n (g - f_n) d\mu \\ &\leq \liminf_n \int (g - f_n) d\mu \\ &= \int g d\mu - \limsup_n \int f_n d\mu\end{aligned}$$

  - Anderzijds:

  $$\begin{aligned}\int g d\mu + \int f_d \mu &= \int (g + f) d\mu \\ &= \int \liminf_n (g + f_n) d\mu \\ &\leq \liminf_n \int (g + f_n) d\mu \\ &= \int g d\mu + \liminf_n \int f_n d\mu\end{aligned}$$

$\int g d\mu < \infty$, dus heeft een additieve inverse. Daarom volgt

$$\int f d\mu = \limsup_n \int f_n d\mu \qquad \int f d\mu = \liminf_n \int f_n d\mu$$

Dus ze vallen samen, daarmee heeft $\int f_n d\mu$ een limiet en deze is gelijk aan $\int f d\mu$.

- (*Variant van monotone convergentie*) Als f_1 μ-integreerbaar is en $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ een μ-a.e. monotoon stijgende rij en $f : X \to [-\infty, \infty]$, elke f_n en f zijn $\mathscr{A}$-meetbaar en de integraal van elke bestaat, dan $\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

  Bewijs We zien dat $f_1 \leq f_n \leq f$ μ-a.e. dus bekijken we de rij $f_n - f_1$ dan zijn dit $[0, \infty]$-waardige functies die monotoon naar $f - f_1$ convergeren. Er geldt met monotone convergentie dus

  $$\lim_n \int (f_n - f_1) d\mu = \int (f - f_1) d\mu$$

  Juist omdat f_1 integreerbaar is, volgt dat we dit mogen schrijven als

  $$\lim_n \int f_n d\mu - \int f_1 = \int f d\mu - \int f_1 d\mu$$

  En aangezien $\int f_1 d\mu \in \mathbb{R}$ een additieve inverse heeft, kunnen we dit reduceren tot:

  $$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

  Dit argument laat zien hoe subtiel de lineariteit van de integraal kan liggen wanneer men $\pm\infty$ toelaat. Zonder integrabiliteit van f_1 kunnen we niets concluderen.

- (*Differentiëren onder het integraalteken*) Een toepassing van DCT:

  Als $I \subset \mathbb{R}$ een open interval, $f : X \times I \to \mathbb{R}$, $g : X \to [0, \infty]$ en

  - $x \mapsto f(x, t)$ is integreerbaar voor elke $t \in I$
  - g is integreerbaar
  - $t \mapsto f(x, t)$ is differentieerbaar op I voor elke $x \in X$:
  - Voor $x \in X$, $t, t_0 \in I$:

    $$\left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} \right| \leq g(x)$$

Dan definiëren we $h(t) = \int_X f(x,t)d\mu$ en we kunnen laten zien dat als t_n een rij in $\mathbb{R}\backslash\{t_0\}$ is met $t_n \to t_0$, dan is $x \mapsto \partial_t f(x,t_0) = \lim_n \left|\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\right| \leq g(x)$, dus met DCT volgt dat

$$\lim_n \int \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}\mu(dx) = \int \partial_t f(x,t_0)\mu(dx)$$

Tevens is voor elke $n \in \mathbb{N}$:

$$\int \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}\mu(dx) = \frac{\int f(x,t_n)\mu(dx) - \int f(x,t_0)\mu(dx)}{t_n-t_0} = \frac{h(t_n)-h(t_0)}{t_n-t_0}$$

Dus elke rij met $t_n \to t_0$ heeft

$$\frac{h(t_n)-h(t_0)}{t_n-t_0} \to \int \partial_t f(x,t_0)\mu(dx)$$

Dus $\partial_t h(t_0)$ bestaat en is gelijk aan $\int \partial_t h(x,t_0)\mu(dx)$. We krijgen

$$\partial_t \int f(x,t_0)\mu(dx) = \int \partial_t f(x,t_0)\mu(dx)$$

2.6

- Voor $(X,\mathscr{A})$ en $(S,\mathscr{B})$ maatruimtes, heet $f : X \to S$ *meetbaar* als $\forall B \in S : f^{-1}(S) \in \mathscr{A}$.
- (2.6.1) Als $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$ met $\sigma(\mathscr{B}_0) = \mathscr{B}$, dan $\forall B \in \mathscr{B}_0\ f^{-1}(B) \in \mathscr{A}, \iff f$ meetbaar $(X,\mathscr{A}) \to (S,\mathscr{B})$.
- (2.6.5) Als $f : X \to \mathbb{R}^d$, weten we dat een generator van $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ is de halfvlakken $\{\{x_i \leq b\}\}_{i=1,b\in\mathbb{R}}^d$

  Dus als we schrijven $f = (f_1,...,f_d)$, dan is f meetbaar $(X,\mathscr{A}) \to (\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ d.e.s.d.a. $\forall i \in \{1,...,d\}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\{f_i \leq b\} \in \mathscr{A}$, d.e.s.d.a. $\forall i \in \{1,...,d\}$, f_i is meetbaar $(X,\mathscr{A}) \to (\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
- De Borel-σ-algebra voor $\mathbb{R} = [-\infty,\infty]$ is $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \{B \cup C \mid B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), C \subset \{\pm\infty\}\}$.
- (2.6.4) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ is meetbaar in de zin $\forall t \in \mathbb{R} : \{f \leq t\} \in \mathscr{A} \iff f$ is meetbaar $(X,\mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.
- $\mathbb{C}$ krijgt de Borelalgebra geërfd van de standaardtopologie op $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.
- $f : X \to \mathbb{C}$ heet *integreerbaar* als $\Im(f)$ en $\Re(f)$ integreerbaar zijn, en dan definieert men $\int f d\mu = \int \Re(f)d\mu + \int \Im(f)d\mu$.
- (2.6.7) $f : X \to \mathbb{C}$ is integreerbaar $\iff |f| : X \to \mathbb{R}$ is integreerbaar.

- (2.6.8) Als $(X, \mathscr{A}, \mu)$ een maatruimte is en $(Y, \mathscr{B})$ meetbare ruimte, $T : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ meetbaar en $g : Y \to [-\infty, \infty]$ $\mathscr{B}$-meetbaar. Dan is g μT^{-1}-integreerbaar $\iff$ $g \circ T$ is μ-integreerbaar en

$$\int_Y g d(\mu T^{-1}) = \int_X (g \circ T) d\mu$$

Bewijs:

Stel $g = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{B_i}$ met $\forall i : 0 \leq a_i < \infty, B_i \in \mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}
\int_Y g d(\mu T^{-1}) &= \sum_{i=1}^k a_i \mu T^{-1}(B_i) \\
&= \sum_{i=1}^k a_i \mu T^{-1}(B_i) \\
&= \int [\sum_{i=1}^k a_i \chi_{T^{-1}(B_i)}] d\mu \qquad \stackrel{(1)}{=} \int g \circ T d\mu
\end{aligned}$$

We nemen z.v.v.a. $B_1, ..., B_k$ paarsgewijs disjunct en $a_1, ..., a_k$ verschillend. Dan zijn ook $T^{-1}(B_1), ..., T^{-1}(B_k)$ paarsgewijs disjunct want $i \neq j \implies T^{-1}(B_i) \cap T^{-1}(B_j) = T^{-1}(B_i \cap B_j) = t^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Dus er volgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k a_i \chi_{T^{-1}(B_i)}(x) = a_i &\iff x \in T^{-1}(B_i) \\
&\iff T(x) \in B_i \\
&\iff g(T(x)) = a_i
\end{aligned}$$

Dus $\sum_{i=1}^k a_i \chi_{T^{-1}(B_i)} = g \circ T$. Hiermee volgt (1).

Stel nu $g : Y \to [0, \infty]$. Als g meetbaar is, zij g_n een stijgende rij simpele $[0, \infty)$-waardige $\mathscr{B}$-meetbare functies met $g_n \to g$ puntsgewijs. Aangezien $\forall y \in Y : g_1(y) \leq g_2(y) \leq ...$ volgt $\forall x \in X : g_1(T(x)) \leq g_2(T(x)) \leq ...$, en puntsgewijs $\lim_n g_n(T(x)) = g(T(x))$, dus montone convergentie van $g_n \uparrow g$ en $g_n \circ T \uparrow g \circ T$ geeft:

$$\int g d(\mu T^{-1}) = \lim g_n d(\mu T^{-1}) = \lim_n g_n \circ T d\mu = \int g \circ T d\mu$$

In het bijzonder volgt dat $\int g d(\mu T^{-1}) < \infty iff \int g \circ T d\mu < \infty$. Tenslotte als $g : Y \to [-\infty, +\infty]$ en $\mathscr{B}$-meetbaar, schrijf dan $g = g^+ - g^-$, dan volgt wegens het voorgaande $\int g^\pm d(\mu T^{-1}) = \int g^\pm \circ T d\mu$, en g is μT^{-1}-integreerbaar $\iff \int g^\pm d(\mu T^{-1}) < \infty \iff \int g^\pm \circ T d\mu < \infty \iff g \circ T$ is integreerbaar, en er geldt, als ofwel $\int g^+ d\mu T^{-1} < \infty$ ofwel $\int g^- d\mu T^{-1}$, dat de μT^{-1}-integraal van g bestaat, en dat $\int g^+ \circ T d\mu < \infty$ ofwel $\int g^- \circ T d\mu < \infty$, dus omdat $g^\pm \circ T = (g \circ T)^\pm$, bestaat de μ-integraal van $g \circ T$ en dan $\int g d(\mu T^{-1}) = \int g^+ d(\mu T^{-1}) - \int g^- d(\mu T^{-1}) = \int (g \circ T)^+ d\mu - \int (g \circ T)^- d\mu = \int g \circ T d\mu$.

3.1

- Voor $(X, \mathscr{A}, \mu)$ een maatruimte en $\{f_n\}_n$, f $\mathscr{A}$-meetbare functies $X \to \mathbb{R}$, heet
  - $f_n \to f$ *in maat* als $\forall \varepsilon > 0 : \lim_n \mu(|f_n - f| > \varepsilon) = 0$
  - $f_n \to f$ *in gemiddelde* als $\lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0$
  - $f_n \to f$ μ-a.e. als voor μ-bijna alle $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$.
  - $f_n \to f$ *uniform* als $|f_n - f|_0 \to 0$.
- Convergentie in maat en μ-a.e. zijn niet generiek te relateren:
  - Zij $f_n = \chi_{[n,\infty)}$, dan $f_n \to 0$ overal, maar $\mu(|f_n - 0| > \frac{1}{2}) = \infty \ \forall n$.
  - Beschouw de rij van indicatorfuncties van

    $$[0, 1/2), [1/2, 1), [0, 1/4), [1/4, 1/2), [1/2, 3/4), ...$$

    Dan $\mu(|f_n - 0| > \varepsilon) \leq 2^{-n_k}$ voor een stijgende rij $n_k \to \infty$, dus $f_n \to 0$ in maat, maar $f_n(x)$ is ∞-vaak 1 voor elke $x \in [0, 1]$.

  In het eerste geval is het probleem: $\cap_n [n, \infty) = \emptyset$ maar $\lambda([n, \infty)) = \infty$ voor alle n (dus geen convergentie van boven).

  In het tweede geval is er wél een deelrij $f_{n_k} \to 0$, namelijk $f_{2^k} = \chi_{[0,2^{-k})}$
- (3.1.2) Als $f_n \to f$ μ-a.e. en μ is eindig, dan $f_n \to f$ in maat.
- (3.1.3) Als $f_n \to f$ in maat, dan is er een deelrij $\{f_{n_k}\}_k$ met $f_{n_k} \to f$ μ-a.e.
- (3.1.5) Als $f_n \to f$ in gemiddelde, dan $f_n \to f$ in maat.
  (vanwege $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int |f_n - f| d\mu$).
- (3.1.6) (*Gedomineerde Convergentiestelling, sterk*) Als $f_n \to f$ μ-a.e. of in maat, en $|f_n| \leq g$, $|f| \leq g$ μ-a.e., door een $g \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, [0, \infty])$, dan $f_n \to f$ in gemiddelde.
- (3.1.4) (*Ergorov*) Als $\{f_n\}_n$ een rij $\mathscr{A}$-meetbare $f_n : X \to \mathbb{R}$ is met $f_n \to f$ μ-a.e. en μ is een eindige maat op $(X, \mathscr{A})$, $\varepsilon > 0$ dan is er een $B \in \mathscr{A}$ met $\mu(B^c) < \varepsilon$ en $f_n|_B \to f|_B$ uniform.
- (7.4.4) (*Lusin*) Zij $(X, \mathscr{G})$ lokaal compact en Hausdorff, $\mathscr{A}$ een σ-algebra die $\mathscr{B}(X)$ bevat (equivalent: die $\mathscr{G}$ bevat) en μ een reguliere maat op $(X, \mathscr{A})$.

  Als $A \in \mathscr{A}$, $f : A \to \mathbb{R}$ is $\mathscr{A}$-meetbaar en $\mu(A) < \infty$ en $\varepsilon > 0$, dan is er een compacte $K \subset A$ met $\mu(A \backslash K) < \varepsilon$ en $f|_K$ is continu .
- Voor $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$: als $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ $f : A \to \mathbb{R}$ meetbaar, $\lambda(A) < \infty$ en $\varepsilon > 0$, dan is er een compacte $K \subset A$ met $\mu(A \backslash K) < \varepsilon$ en $f|_K : K \to \mathbb{R}$ continu.

- Als $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$ en μ is eindig, dan $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$
- Als $\sum_n \int |f_n - f| d\mu < \infty$ dan $f_n \to f$ μ-a.e.

4.1

- Een *getekende maat* is een functie $\mu : \mathscr{A} \to [-\infty, \infty]$ die $\mu(\emptyset) = 0$ en σ-additief is.

  Een *complexe maat* is een functie $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ die $\mu(\emptyset) = 0$ en σ-additief is.

  Belangrijk gevolg voor getekende maten: ofwel $\infty \in \mu(\mathscr{A})$ ofwel $-\infty \in \mu(\mathscr{A})$ maar niet beide. Immers als $\mu(A) = \infty$, dan moet $\mu(X) = \mu(A^c) + \mu(A)$ gedefinieerd, zijn, dus $\mu(A^c) > -\infty$ en $\mu(X) = \infty$. Als noch $\infty \in \mu(\mathscr{A})$ noch $-\infty \in \mu(\mathscr{A})$, dan heet μ *eindig*. Complexe maten zijn altijd eindig.

- (4.1.2) Als $(X, \mathscr{A}, \mu)$ een getekende of complexe maatruimte is $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$

  - $\forall n : A_n \supset A_{n+1}$ en $\exists m : \mu(A_m) < \infty \implies \mu(\cap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$
  - $\forall n : A_n \subset A_{n+1} \implies \mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$

- (4.1.3) Als μ een eindig additieve $\mathbb{C}$ (of $[-\infty, \infty]$)-waardige functie op $\mathscr{A}$ is met $\mu(\emptyset) = 0$ en

  - $\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$ voor alle stijgende rijen $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$; of
  - $\lim_n \mu(A_n) = 0$ voor alle dalende rijen $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ met $\cap_n A_n = \emptyset$,

  dan is μ een $\mathbb{C}$-waardige (of getekende) maat.

- Een $A \in \mathscr{A}$ heet

  - *negatief* als $\forall B \in \mathscr{A}, B \subset A : \mu(B) \leq 0$
  - *positief* als $\forall B \in \mathscr{A}, B \subset A : \mu(B) \geq 0$

- (4.1.4) Als μ getekende maat is, $A \in \mathscr{A}$ en $-\infty < \mu(A) < 0$, dan is er een negatieve verzameling $B \subset A$ met $\mu(B) \leq A$.

  Bewijs:

  Zij $\delta_1 := \sup\{\mu(E) \mid E \in \mathscr{A}, E \subset A\}$ dan $\delta_1 \geq \mu(\emptyset) = 0$ Kies een $E_1 \in \mathscr{A}$, met $E_1 \subset A$ en $\mu(E_1) > \min\{\frac{1}{2}\delta_1, 1\}$

  Zij dan i.h.a. $\delta_n = \sup\{\mu(E) \mid E \in \mathscr{A}, E \subset A \backslash (\cup_{m=1}^{n-1} E_m)\}$ en $E_n \subset A \backslash (\cup_{m=1}^{n} E_m)$ $E \in \mathscr{A}$, met $\mu(E) > \min\{\frac{1}{2}\delta_n, 1\}$.

  Beschouw dan $B = A \backslash (\cup_{m=1}^{\infty} E_m)$. $\cup_{m=1}^{\infty} E_m \subset A$ en $\mu(A) < \infty$ en $\{E_n\}_n$ disjunct, geeft $0 \leq \mu(\cup_{m=1}^{\infty} E_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) < \infty$, dus $\mu(E_m) \to 0$, maar $0 \leq \delta_n \leq 2\mu(E_n)$ dus $\delta_n \to 0$

Duidelijk is dat $\mu(B) > -\infty$ anders zou $\mu(A) = -\infty$ moeten zijn. Daarnaast $\mu(B) + \mu(\cup_{m=1}^{\infty} E_n) = \mu(A)$, dus wegens $\mu(E_n) \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, volgt $\mu(B) \leq \mu(A)$. Als nu $E \subset B$, $E \in \mathscr{A}$, dan zit $E \subset A \backslash (\cup_{m=1}^{n} E_n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus $\mu(E) \leq \delta_n$ voor alle n¡ dus $\mu(E) \leq 0$. Dus B is een negatieve verzameling.

- (4.1.5) (*Hahn Decompositie*) Voor $(X, \mathscr{A}, \mu)$ een getekende maatruimte, $\exists P, N \in \mathscr{A}$ partitie van X met P een positieve verzameling en N een negatieve verzameling. N en P zijn uniek in de zin dat als (N_1, P_1), (N_2, P_2) voldoen, dan hebben $N_1 \cap P_2$ en $N_2 \cap P_1$ maat 0.

  Bewijs:

  Neen z.v.v.a. dat $\mu(X) > -\infty$, dus dat $-\infty$ niet wordt aangenomen. Als dit niet zo is, beschouwen we $-\mu$.

  Zij $L = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathscr{A}, \text{negatieve set}\}$ en zij $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$ een rij met $\lim_n \mu(A_n) = L$. Zij $N = \cup_n A_n$. Dan is N negatief, want als $E \subset N$ met $\mu(E) > 0$, beschouw dan de disjunct gemaakte rij $B_n = A_n \backslash (\cup_{m1}^{n-1} A_m)$, dan $\mu(E) = \sum_n \mu(E \cap B_n) > 0$, dus er is een $n \in \mathbb{N}$ met $\mu(E \cap B_n) > 0$, maar $E \cap B_n \subset A_n$ en A_n is negatief, contradictie. Dus N is negatief.

  Bovendien, als $N' \subset X \backslash N$ ook negatief is, dan laten we zien dat $\mu(N') = 0$. Namelijk, anders is $N \cup N'$ negatief met $\mu(N \cup N') < \mu(N)$, contradictie, want $\mu(N) = \lim_n \mu(\cup_{m=1}^{n} A_m) \leq L$, dus $\mu(N) = L$ wegens N negatief.

  Dit laat ook zien dat $P = X \backslash N$ positief is, want $N' \subset P$ betekent $\mu(N') \geq 0$.

  Tenslotte als (N_1, P_1) en (N_2, P_2) Hahn-decomposities zijn, dan is $N_1 \cap P_2$ zowel van maat ≤ 0 wegens $\subset N_1$ als maat ≥ 0 wegens $\subset P_2$, dus $(N_1 \backslash N_2) \cup (N_2 \backslash N_1)$ en $(P_1 \backslash P_2) \cup (P_1 \backslash P_1)$ zijn μ-null verzamelingen.

- (4.1.6) (*Jordan Decompositie*) Voor μ getekende maat is $\mu = \mu^+ - \mu^-$, waarbij μ^+ en μ^- maten zijn, namelijk:

  - Per definitie:
    $\mu^+(A) = \mu(A \cap P)$,
    $\mu^-(A) = -\mu(A \cap N)$.
  - Equivalent hiermee:
    $\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \subset A, B \in \mathscr{A}\}$,
    $\mu^-(A) = \sup\{-\mu(B) \mid B \subset A, B \in \mathscr{A}\}$

  $\mu^{\pm}$ hangen dus niet af van de keuze van de decompositie en zijn dus uniek.

- De *variatie* van de getekende maat μ is $|\mu| = \mu^+ + \mu-$. Dit is de kleinste positieve maat ν op $\mathscr{A}$ zodat $\nu(A) \geq |\mu(A)|$ voor alle $A \in \mathscr{A}$. In het bijzonder $\forall A \in \mathscr{A} : |\mu|(A) \geq |\mu(A)|$.

- Voor een complexe maat ontbindt men $\mu = \nu + i\gamma$ en vervolgens kunnen de eindige maten ν, γ Jordan-ontbonden worden, wat een unieke ontbinding $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$ geeft.

- (4.1.7) De variatie van een complexe maat definieert men

$$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)| \mid A_1, ..., A_n \text{ partitie van } A\}$$

Dit is een eindige maat op $(X, \mathscr{A})$. De definitie valt samen met de variatie van een getekende maat in het geval $\mu(\mathscr{A}) \subset \mathbb{R}$.

- (4.1.8) De *totale variatie* van een $\mathbb{C}$-waardige/getekende maat μ is $\|\mu\| = |\mu|(X)$. Noteer:
  - $\mathscr{M}(X, \mathscr{A}, \mathbb{R})$ de vectorruimte van $\mathbb{R}$-waardige (eindige) maten op $(X, \mathscr{A})$
  - $\mathscr{M}(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$ de vectorruimte van $\mathbb{C}$-waardige maten op $(X, \mathscr{A})$

  Dan vormen deze Banach-ruimten onder de totale-variatienorm $\|\cdot\|$.

4.2

- Voor μ, ν maten op $(X, \mathscr{A})$, schrijft men $\mu \ll \nu$ als $\nu(A) = 0 \implies \mu(A) = 0$: μ heet *absoluut continu* m.b.t. ν.
- $\mu \ll \nu \iff (\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathscr{A} : \nu(A) < \delta \implies \mu(A) < \varepsilon)$.
- (4.2.2) (*Radon-Nikodym*) Als $(X, \mathscr{A})$ een meetbare ruimte is met μ, ν σ-eindige maten en $\mu \ll \nu$, dan is er een $\mathscr{A}$-meetbare $g : X \to [0, \infty)$ met $\mu(A) = \int_A g d\nu$, $\forall A \in \mathscr{A}$. g is uniek tot op ν-a.e. gelijkheid.

  Bewijs:

  Neem eerst μ en ν eindige maten.

$$\mathscr{F} = \left\{ f : X \to [0, \infty) \mid f \ \mathscr{A}\text{-meetbaar} \ \int_A f d\mu \leq \nu(A), \ \forall A \in \mathscr{A} \right\}$$

  Als $f_1, f_2 \in \mathscr{F}$, dan $A_1 = \{f_1 \geq f_2\} \in \mathscr{A}$, $A_2 = A_1^c \in \mathscr{A}$ en $\int f_1 \vee f_2 d\mu = \int_{A_1} f_1 d\mu + \int_{A_2} f_2 d\mu \leq \nu(A_1) + \nu(A_2) = \nu(A)$, dus $f_1 \vee f_2 \in \mathscr{F}$.

  Zij nu $\{g_n\}_n$ een rij in $\mathscr{F}$ met $\lim_n \int g_n d\mu = \sup\{\int f d\mu \mid f \in \mathscr{F}\}$. Dan kunnen we $f_n = \bigvee_{i=1}^{n} g_i \in \mathscr{F}$ nemen, en is $f_1 \leq f_2 \leq ...$ dus met monotone convergentie en $f := \lim_n f_n$ geldt:

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu \geq \int g_n d\mu = \sup\{\int f d\mu \mid f \in \mathscr{F}\}$$

  Terwijl anderzijds met $f_n \in \mathscr{F}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dus geldt $\int_A f_n d\mu \leq \nu(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall A \in \mathscr{A}$. Maar ook $f_n \chi_A \to f$, en $\{\chi_A f_n\}_n$ is monotoon. Dus:

$$\int_A f d\mu = \lim_n \int_A f_n d\mu \leq \nu(A)$$

Dus $f \in \mathscr{F}$. Dus $\int f d\mu = \sup\{\int g d\mu \mid g \in \mathscr{F}\}$.

Definieer nu $\nu_0(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu$ voor $A \in \mathscr{A}$. Wegens $\int_A f d\mu \leq \nu(A)$ voor alle $A \in \mathscr{A}$ geldt dus $\nu_0(A) \geq 0$, dus ν_0 is een maat op $(X, \mathscr{A})$.

Als $\nu_0(A) \neq 0$ voor een $A \in \mathscr{A}$, dan is er een $\varepsilon > 0$ met $\nu_0(X) > \varepsilon\mu(X)$. Zij (N, P) de Hahn-ontbinding bij $\nu_0 - \varepsilon\mu$ (getekende eindige maat).

- Voor elke $A \in \mathscr{A}$ hebben we $\nu_0(A) = \int_A f d\mu + \nu_0(A) \geq \int_A g d\mu + \nu_0(A \cap P)$ en $\nu_0(A \cap P) \geq \varepsilon\mu(A \cap \varepsilon)$ want P is positief voor $\nu_0 - \varepsilon\mu$, dus dit is .. $\geq \int_A g d\mu + \varepsilon\mu(A \cap P) = \int_A (f + \varepsilon\chi_P) d\mu$. Dus $f + \varepsilon\chi_P \in \mathscr{F}$.
- Anderzijds (gebruik nu absolute continuiteit), $\mu(P) > 0$ want als $\mu(P) = 0$ dan $\nu_0(P) \leq \nu(P) = 0$ en dan zou $(\nu - \varepsilon\mu)(X) = (\nu - \varepsilon\mu)(N) \leq 0$ zijn, in tegenspraak met $\nu_0(X) > \varepsilon\mu(X)$. Er volgt dus dat $\int (f + \varepsilon\chi_P) d\mu = \int f d\mu + \varepsilon\mu(P) > \int f d\mu = \sup\{\int f d\mu \mid f \in \mathscr{F}\}$.

Maar $\sup\{\int f d\mu \mid f \in \mathscr{F}\} \leq \nu(X) < \infty$, dus het tweede punt is een tegenspraak met het eerste punt $f + \varepsilon\chi_P \in \mathscr{F}$.

De uniciteit volgt omdat als g, h voldoen, dan $\int_A g d\mu = \int_A h d\mu$ dus wegens ν eindig volgt $\int h d\mu < \infty$, $\int g d\mu < \infty$ dus $h - g$ integreerbaar met $\int_A (g - h) d\mu = 0 \ \forall A \in \mathscr{A}$. Omdat $A^+ := \{g - h \geq 0\}$ en $A^- = \{g - h \leq 0\}$ ook $\mathscr{A}$-meetbaar zijn, volgt dat $\int (g-h)^+ d\mu = \int (g-h)^- d\mu = 0$. Dus $(g-h)^+ = 0$ en $(g-h)^- = 0$ μ-a.e. Dus $g = h$ μ-a.e.

- Voor μ, ν getekende of complexe maten, schrijft men $\mu \ll \nu$ als $|\mu| \ll |\nu|$ geldt.
- Als μ een eindige $\mathbb{R}$-waardige of $\mathbb{C}$-waardige maat is en ν σ-eindig en $\mu \ll \nu$, dan is er een $g \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mathbb{R}, \mu)$ of $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mathbb{C}, \mu)$ met $\mu(A) = \int_A g d\nu$, $\forall A \in \mathscr{A}$, en g is uniek tot op ν-a.e. gelijkheid
- Daarnaast $|\mu|(A) = \int_A |g| d\nu$.
- Als ν een $\mathbb{C}$ of $\mathbb{R}$-waardige maat is op $(X, \mathscr{A})$, dan is $|\frac{d\nu}{d|\nu|}| = 1$ μ-a.e.

4.3

- μ een positieve maat heet geconcentreerd op $E \in \mathscr{A}$ als $\mu(E^c) = 0$. Een getekende of complexe maat μ heet geconcentreerd op $E \in \mathscr{A}$ als $|\mu|(E^c) = 0$
- Equivalent: $\forall A \in \mathscr{A}$ met $A \subset E^c$: $\mu(A) = 0$.
- μ en ν heten singulier (met elkaar) als er een $E \in \mathscr{A}$ is met $|\mu|(E) = 0$, $|\nu|(E^c) = 0$. Notatie $\mu \perp \nu$.
- (4.3.1) (*Lebesgue ontbinding*) Als $(X, \mathscr{A})$ meetbare ruimte is en μ positieve maat en ν eindig getekende, σ-eindig positieve of complexe maat op $(X, \mathscr{A})$, an zijn er unieke eindig getekende, σ-eindige positieve of complexe maten ν_s, ν_a met:

- $\nu_d \ll \mu$
- $\nu_s \perp \mu$
- $\nu = \nu_a + \nu_s$

Bewijs:

Neem eerst ν eindig positief. Definieer $\mathscr{N} = \{B \in \mathscr{A} \mid \mu(B) = 0\}$. Dan nemen we een rij $\{B_n\} \subset \mathscr{N}$ met $\lim_n \nu(B_n) = \sup\{\nu(B) \mid B \in \mathscr{N}\}$.

Definieer dan $N = \cup_n B_n \in \mathscr{A}$ en z.v.v.a. $B_j \subset B_{j+1}$, dus $\nu(N) = \lim_j \nu(B_j) = \sup\{\nu(B) \mid B \in \mathscr{N}\}$. Definieer $\nu_s(A) := \nu(A \cap N)$. Dan is ν_s een maat geconcentreerd op N en μ een maat geconcentreerd op N^c, dus $\nu_s \perp \mu$.

Neem nu $\nu_d = \nu - \nu_s$. Omdat $\nu_s \leq \nu$ is dit een positieve maat. Bovendien, als $B \in \mathscr{A}$ met $\mu(B) = 0$, dan $B \in \mathscr{N}$, dus als $\nu_d(B) > 0$, dan zou dat een tegenspraak opleveren: $0 < \nu_d(B) = \nu(B) - \nu(B \cap N)$, dus $\nu(N \cup B) = \nu(N) + \nu(B) - \nu(B \cap N) > \nu(N)$, terwijl $B \cup N \in \mathscr{N}$ en $\nu(B) = \sup\{\nu(B) \mid B \in \mathscr{N}\}$.

Er volgt dus dat $\nu_d \ll \nu$.

Voor ν getekend en eindig: gebruik eerst de Jordanontbinding $\nu^+ - \nu^-$ met $\nu^\pm$ eindige positieve maten. Dan $\nu_d = (\nu^+)_d - (\nu^-)_d$ en $\nu_s = (\nu^+)_s - (\nu^-)_s$ voldoen.

Voor complexe maten: gebruik de Jordanontbinding voor de reële en imaginaire component apart.

Voor σ-eindige maten: Neem eerst $\nu = \sum_n \nu_n$ voor ν_n elk eindig, door $\nu_n(A) = \nu(A \cap X_n)$ met $X = \cup_n X_n$ een partitie in ν-eindige verzamelingen te nemen. Dan is er voor elke $\nu_n = (\nu_n)_d + (\nu_n)_s$. Dan zijn $\sum_n (\nu_n)_d$ en $\sum_n (\nu_n)_s$ weer positieve maten en het absoluut continu/ singulier zijn blijft bewaard.

- (*Opgave* 4.1.3 & 4.3.7) Voor μ_1, μ_2 eindige maten, definieert men

  - $\mu_1 \vee \mu_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+$
  - $\mu_1 \wedge \mu_2 = \mu_1 - (\mu_1 - \mu_2)^+$

  Er geldt $\mu_1 \vee \mu_2 \geq \mu_1, \mu_2$ en $\nu \geq \mu_1, \mu_2 \implies \nu \geq \mu_1 \vee \mu_2$, voor elke positieve maat ν op $(X, \mathscr{A})$

  Er geldt ook $\mu_1 \wedge \mu_2 \leq \mu_1, \mu_2$ en $\nu \leq \mu_1, \mu_2 \implies \nu \leq \mu_1 \wedge \mu_2$ voor elke positieve maat ν op $(X, \mathscr{A})$.

  Voor eindige positieve maten, T.F.A.E:

  - $\nu \perp \mu$
  - $\nu \wedge \mu = 0$
  - $\nu \vee \mu = \nu + \mu$.

5.1

- Voor $(X,\mathscr{A})$, $(Y,\mathscr{B})$ maatruimten definieert men

$$\mathscr{A}\times\mathscr{B}=\sigma(\{A\times B\mid A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}$$

- (5.1.2) Voor de meetbare ruimte $(X\times Y,\mathscr{A}\times\mathscr{B})$ geldt dan

  (a) Als $E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$, dan $\forall x\in X, y\in Y$:

$$\begin{aligned}E_x&:=\{y\in Y\mid(x,y)\in E\}\in\mathscr{B}\\ E^y&:=\{x\in X\mid(x,y)\in E\}\in\mathscr{A}\end{aligned}$$

  (b) Als $f:(X\times Y,\mathscr{A}\times\mathscr{B})\to(S,\mathscr{C})$ meetbaar is, dan $\forall x\in X, y\in Y$:
    - $f_x(y):=f(x,y)$ meetbaar $(Y,\mathscr{B})\to(S,\mathscr{C})$
    - $f^y(x):=f(x,y)$ meetbaar $(X,\mathscr{A})\to(S,\mathscr{C})$

  Bewijs:

  (a) Neem $\mathscr{F}=\{E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\mid E_x\in\mathscr{B}\}$ en $\mathscr{F}'=\{E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\mid E^y\in\mathscr{A}\}$. Dan kunnen we laten zien dat $\mathscr{F}$ en $\mathscr{F}'$ σ-algebra's zijn die de $A\times B$, $A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}$ bevatten.

  (b) $(f_x)^{-1}(D)=(f^{-1}(D))_x$, $(f^y)^{-1}(D)=(f^{-1}(D))^y$ en gebruik (a).

- (5.1.3) $(X,\mathscr{A},\mu)$ en $(Y,\mathscr{B},\nu)$ σ-eindige maatruimten en $E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$, dan is $x\mapsto\nu(E_x)$ $\mathscr{A}$-meetbaar en $y\mapsto\nu(E^y)$ $\mathscr{B}$-meetbaar.

  Bewijs

  $\mathscr{C}=\{A\times B\mid A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}$ is een π-systeem.

  Als ν eindig is, kan men aantonen dat

$$\mathscr{F}=\{E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\mid x\mapsto\nu(E_x)\text{ is }\mathscr{A}\text{-meetbaar}\}$$

  een d-systeem is dat $\mathscr{C}$ bevat, en dus $\mathscr{A}\times\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{C})=d(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$.

  Als ν σ-eindig is, dan kan men $X=\cup_n X_n$ schrijven met $\{X_n\}_n$ disjunct en $\nu(X_n)<\infty$. Zet $\nu_n(A)=\nu(A\cap X_n)$ en pas het voorgaande toe op ν_n eindig. Dan is $\nu=\sum_n\nu_n$ en dus $x\mapsto\nu(E_x)=\sum_n\nu(E_x)$ is de limiet van een reeks van niet-negatieve $\mathscr{A}$-meetbare functies, dus $\mathscr{A}$-meetbaar.

- (5.1.4) $(X,\mathscr{A},\mu)$ en $(Y,\mathscr{B},\nu)$ σ-eindige maatruimten, dan is er een unieke maat $\mu\times\nu:\mathscr{A}\times\mathscr{B}\to[0,\infty]$ met $\forall A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}$:

$$(\mu\times\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$$

  Bewijs:

  - Definieer $\rho_1(E)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx)$, $\rho_2(E)=\int_Y\mu(E_y)\nu(dy)$.
  - Dan toont men eerst σ-additiviteit aan en $\rho_i(\emptyset)=0$ voor $i=1,2$.

- Vervolgens $\rho_i(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ voor $A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}$.
- Tenslotte volgt uniciteit simpelweg omdat $\mathbb{C} = \{A \times B \mid A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$ een π-systeem is dat $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ genereert, en ρ_1 en ρ_2 σ-eindig zijn (dat ρ_1 en ρ_2 σ-eindig zijn moet nog even aangetoond worden door een geschikte partitie van $X \times Y$ te nemen).

De σ-eindigheid is dus alleen nodig voor uniciteit van de maten ρ_i, niet voor de existentie.

5.2

- (5.1.2) (*Tonelli*) Zij $(X, \mathscr{A}, \mu)$ en $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ σ-eindig en $f : X \times Y \to [0, \infty]$ $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$-meetbaar. Dan:
  - $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ is $\mathscr{A}$-meetbaar en $y \mapsto \int_X f^y d\mu$ is $\mathscr{B}$-meetbaar.
  - f voldoet aan

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int (\int f_x d\nu) \mu(dx) = \int (\int f^y d\mu) \nu(dy)$$

- (*Fubini*) Zij Zij $(X, \mathscr{A}, \mu)$ en $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ σ-eindig en $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$-meetbaar **en $\nu \times \mu$-integreerbaar**. Dan:
  - f_x is voor ν-a.e. $y \in Y$ ν-integreerbaar.
  - f^y is voor μ-a.e. $x \in X$ μ-integreerbaar.
  - Definieert men:

$$I_f(x) = \begin{cases} \int f_x d\nu & \text{als } f_x \text{ integreerbaar} \\ 0 & \text{zo niet} \end{cases}$$

$$J_f(y) = \begin{cases} \int f^y d\mu & \text{als } f^y \text{ integreerbaar} \\ 0 & \text{zo niet} \end{cases}$$

  Dan:

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int I_f(x) \mu(dx) = \int J_f(y) \nu(dy)$$

  - Definieert men voor algemeen $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)_{i=1}^n$ een collectie maatruimten, $\mathscr{A}_1 \times ... \times \mathscr{A}_n = \sigma(\{A_1 \times ... \times A_n \mid A_i \in \mathscr{A}_i, i = 1, ...n\})$, dan zien we

$$(\mathscr{A}_1 \times ... \times A_k) \times (A_{k+1} \times ... \times A_n) \cong \mathscr{A}_1 \times ... \times \mathscr{A}_n$$

  Via de identificatie $((a_1, ..., a_k), (a_{k+1}, ..., a_n)) \mapsto (a_1, ..., a_n)$. Dat is namelijk een bijectie. We zien immers dat als we herhaalde carthesische producten niet nesten, dan bevat $(\mathscr{A}_1 \times ... \times A_k) \times (A_{k+1} \times ... \times A_n)$ alle rechthoeken $A_1 \times ... \times A_n$, dus ook heel $\mathscr{A}_1 \times ... \times A_n$, en andersom bevat $\mathscr{A}_1 \times ... \times A_n$ ook alle $(\mathscr{A}_1 \times ... \times \mathscr{A}_k) \times (\mathscr{A}_{k+1} \times ... \times \mathscr{A}_n)$-meetbare verzamelingen, namelijk elke $A_1 \times ... \times A_k \times X_{k+1} \times ... \times X_n$ en elke $X_1 \times ... \times A_k \times A_{k+1} \times ... \times A_n$ ligt erin, dus daarmee ook elke $V = A \times X_{k+1} \times ... \times X_n$ voor $A \in \mathscr{A}_1 \times ... \times \mathscr{A}_k$ en elke $U = X_1 \times ... \times X_k \times A'$ voor $A' \in \mathscr{A}_{k+1} \times ... \times \mathscr{A}_n$, dus ligt $A \times A' = U \cap V \in \mathscr{A}_1 \times ... \times \ A_n$, dus volgt de omgekeerde inclusie.

5.3

- (5.3.1) Als $f : X \to [0, \infty]$ $\mathscr{A}$-meetbaar is, en λ de Lebesgue-maat op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, en het oppervlak onder de grafiek:

$$E = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

  Dan is $E \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$, want $E = \cup_{q \in \mathbb{Q}}(\{f \leq q\} \times [0, q])$. Er geldt

$$(\mu \times \lambda)(E) = \int \lambda(E_x)\mu(dx) = \int f(x)\mu(dx)$$
$$(\mu \times \lambda)(E) = \int \mu(E^y)\lambda(dy) = \int \mu(\{x \in X \mid f(x) > y\}\lambda(dy)$$

- (5.3.4) Voor $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, \lambda)$:

  - Voor λ-a.e. $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ is λ-integreerbaar.
  - $(f * g)(x) = \begin{cases} \int f(x-t)g(t)\lambda(dt) & t \mapsto f(x-t)g(t) \lambda\text{-integreerbaar} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$
    Voldoet aan $f * g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, \lambda)$ en $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

  Bewijs:

  - Eerst kunnen we laten zien dat $(x, t) \mapsto f(x-t)g(t)$ gelijk is aan $(f \circ (\pi_1 - \pi_2)) \cdot (g \circ \pi_2)$ dus $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$-meetbaar. $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$ dus deze functie is $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$-meetbaar.
  - Dit betekent dat we $(x, t) \mapsto |f(x-t)g(t)|$ kunnen integreren m.b.t. $\lambda \times \lambda$ want dit is een niet-negatieve $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$-meetbare functie.
  - Tonelli geeft dan:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x-t)g(t)|(\lambda \times \lambda)(d(x,t)) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)|\lambda(dx)\lambda(dt) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\lambda(dt) \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\lambda(dx) \\ &= \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty \end{aligned}$$

    We gebruiken hierbij translatie-invariantie van λ in de f-integraal.

– Dus $(x,t) \mapsto f(x-t)g(t)$ is $\lambda \times \lambda$-integreerbaar, en Fubini geeft dan: $[(x,t) \mapsto f(x-t)g(t)]_t$ is integreerbaar voor λ-a.e. $t \in \mathbb{R}$, dus en Fubini geeft, voor $(f * g) = I_t$ dat

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} I_t \lambda(dt) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x-t)g(t)(\lambda \times \lambda)(d(x,t)) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x-t)g(t)|(\lambda \times \lambda))(d(x,t)) \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1\end{aligned}$$

10.1

- – *Kansruimte*: is een maatruimte $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ met $P(\Omega) = 1$
  – *Stochast*: is een $\mathscr{A}$-meetbare $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  – *Verwachting* (wanneer de integraal bestaat) $E(X) = \int X dP$
  – *Variantie* (wanneer $E(X)$ bestaat) $V(X) = \int (X - E(X))^2 dP = E(X^2) - E(X)^2$.
  – *p-de moment*: $E(X^p) = \int X^p dP$
  – De uitspraak $X \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ wordt vaak vermeld als "het p-de moment is eindig".
- Als er een aftelbare $C \subset \mathbb{R}$ is met $PX^{-1}(C) = 1$, dan heet X *discreet.* Merk op dat voor elke enumeratie van C, $|X| = \sum_{k=1} c_k \chi\{X = c_k\}$, dus met Beppo-Levi volgt:

  $$E|X| = \int |X| dP = \sum_{c \in C} |c| P(X = c)$$

  En algemener met uitsplitsen $X = X^+ - X^-$: als één van de sommen $\sum_{c \in C_{<0}} cP(X = c)$, $\sum_{c \in C_{\geq 0}} cP(X = c)$ eindig is, dan bestaat $E(X)$ en:

  $$E(X) = \sum_{c \in C_{<0}} cP(X = c) + \sum_{c \in C \geq 0} cP(X = c) = \sum_{c \in C} cP(X = c)$$

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ induceert de beeldmaat PX^{-1}, vaak met P_X aangeduid, op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Uit 1.3 kennen we nog de distributiefunctie $F(t) = PX^{-1}((-\infty, t])$, nu genoteerd als $F_X(t)$.
- Als $PX^{-1} \ll \lambda$, dan heet X *continu*, en noemt men de Radon-Nikodym afgeleide f_X van PX^{-1} m.b.t. λ, de *dichtheidsfunctie*. Deze is λ-a.e uniek.
- (10.1.5) er geldt $f_{aX+b}(t) = \frac{1}{a} f_X(\frac{t-b}{a})$ voor λ-a.e. $t \in \mathbb{R}$.
- Voor $\{X_i\}_{i \in I}$ een collectie meetbare functies $\Omega \to \mathbb{R}$ is er een kleinste σ-algebra die elke X_i meetbaar maakt: noteer deze als $\sigma(X_i, i \in I) = \sigma(\{X_i^{-1}(B) \mid i \in I, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\})$.

- (*Onafhankelijkheid*) Voor $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ een maatruimte heten de volgende objecten onafhankelijk:
  - $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{A}$ als $\forall J \subset_{\text{fin}} I$, $P(\cap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} P(A_j)$
  - Sub-σ-algebra's $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{P}(\mathscr{A})$ als $\forall \{A_i\}_{i\in I}$, $A_i \in \mathscr{A}_i$, $\{A_i\}_{i\in I}$ onafhankelijk is.
  - Stochasten $\{X_i : \Omega \to S\}_{i\in I}$ als $\{\sigma(X_i)\}_{i\in I}$ onafhankelijk is.
- (10.1.7) $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ kansruimte, $\{A_i\}_{i\in I}$ collectie onafhankelijke sub-σ-algebras van $\mathscr{A}$ en $\{S_j\}_{j\in J}$ een partitie van I en voor $j \in J$, $\mathscr{B}_j = \sigma(\cup_{i\in S_j} \mathscr{A}_i)$ dan $\{\mathscr{B}_j\}_{j\in J}$ zijn onafhankelijk.
- (10.1.9) $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ kansruimte, $(S, \mathscr{B})$ meetbare ruimte en $X_1, ..., X_d$: $(\Omega, \mathscr{A}) \to (S, \mathscr{B})$ meetbaar en $X = (X_1, ..., X_d)$. Dan is $\{X_1, ..., X_d\}$ onafhankelijk $\iff$ $P_X = P_{X_1} \times ... \times P_{X_d}$.
- (10.1.10) $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ kansruimte en $X_1, ..., X_n$ onafhankelijke $\mathbb{R}$-waardige stochasten op Ω met $E(X_i) < \infty$ $\forall i = 1, ..., d$. Dan $\prod_i X_i$ heeft eindige verwachting en $E(\prod_i X_i) = \prod_i E(X_i)$
- Als $X_1, ..., X_d$ i.i.d. $\mathbb{R}$-waardig met $E(X_i^2) < \infty$, dan $V(\sum_i X_i) = \sum_i V(X_i)$.
- Als ν_1, ν_2 kansmaten op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ zijn, dan:
  - De *convolutie* is $(\nu_1 * \nu_2)(A) = (\nu_1 \times \nu_2)(\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \in A\}$
  - We zien i.h.b. vanwege (10.1.9) $P_{X_1+X_2} = P_{X_1} * P_{X_2}$.
- (10.1.12) Eigenschappen van de convolutie $\nu_1 * \nu_2$ zijn:
  - $(\nu_1 * \nu_2)(A) = \int \nu_1(A - y)\nu_2(dy) = \int \nu_2(A - x)\nu_1(dx)$
  - Indien $\nu_1 \ll \lambda$, dan $\nu_1 * \nu_2 \ll \lambda$ en (op λ-a.e. gelijkheid):
  $$\frac{d(\nu_1 * \nu_2)}{d\lambda}(x) = \int \frac{d\nu_1}{d\lambda}(x - y)\nu_2(dy)$$
  - Indien $\nu_1 \ll \lambda$ en $\nu_2 \ll \lambda$, dan $\nu_1 * \nu_2 \ll \lambda$ en (op λ-a.e. gelijkheid):
  $$\frac{d(\nu_1 * \nu_2)}{d\lambda} = \frac{d\nu_1}{d\lambda}(x - y)\frac{d\nu_2}{d\lambda}(y)\lambda(dy)$$
- T.F.A.E.: voor $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathscr{A}$,
  - $\{A_i\}_{i=1}^n$ is onafhankelijk.
  - $P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ geldt voor elke keuze van $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$.
  - $\{A_i^c\}_{i=1}^n$ is onafhankelijk.
  - De stochasten $\{\chi_{A_i}\}_{i=1}^n$ zijn onafhankelijk.

10.2

- (10.2.1) (*Zwakke wet van grote aantallen*) Als $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij i.i.d. $\mathbb{R}$-waardige stochasten is met $E(X_1^2) < \infty$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, dan $S_n/n \to E(X_1)$ in maat P (in kans).

  Bewijs: Gezien $V(X_1) < \infty$,

$$\begin{aligned}
P(|S_n/n - E(X_1)| > \varepsilon) &= P(\frac{1}{n^2}|S_n - E(S_n)|^2 > \varepsilon^2) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int \frac{1}{n^2}(S_n - E(S_n))^2 dP \\
&= \frac{1}{n^2\varepsilon^2}V(S_n) \\
&= \frac{1}{n^2\varepsilon^2}nV(X_1) \\
&\to 0 \quad \text{als } n \to \infty
\end{aligned}$$

- (∞-*vaak*) De eventualiteiten:

$$\begin{aligned}
\cap_{k=0}^{\infty} \cup_{n\geq k}^{\infty} A_k &=: \{A_n \ \infty\text{-vaak}\} \\
\cup_{k=0}^{\infty} \cap_{n\geq k}^{\infty} A_k &=: \{A_n \text{ bijna altijd}\}
\end{aligned}$$

- (10.2.2) (*Borel-Cantelli*) $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ kansruimte en $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$ eventualiteiten. Dan

  - $\sum_n P(A_n) < \infty \implies P(\{A_n \infty\text{-vaak}\}) = 0.$
  - $\{A_n\}_n$ onafhankelijk en $\sum_n P(A_n) = \infty \iff P(\{A_n \ \infty\text{-vaak}\}) = 1$

  Bewijs:

  - We gebruiken dat onder convergentie van de reeks, de staartsommen naar 0 gaan:

$$\begin{aligned}
P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) &= \lim_n P(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&\leq \lim_n \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \\
&= 0, \text{ want } \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty
\end{aligned}$$

    .

– Gebruik $\exp(-x) \geq 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
P((\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k)^c) &= P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k^c) \\
&= \lim_n P(\cap_{k=n}^{\infty} A_k^c) \\
&= \lim_n \lim_N P(\cap_{k=n}^{N} A_k^c) \\
&= \lim_n \lim_N \prod_{k=n}^{N} P(A_k^c) \\
&= \lim_n \prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)) \\
&\leq \lim_n \prod_{k=n}^{\infty} \exp(-P(A_k)) \\
&= \lim_n \exp(-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)) = \lim_n 0 = 0
\end{aligned}$$

Dus $P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1$

- (*Kolmogorov's 0-1-wet*) Zij $\{X_n\}_n$ onafhankelijk, en $\mathscr{T} = \cap_n \sigma(X_k \mid k \geq n)$ de *staart-σ-algebra*. Dan elke $A \in \mathscr{T}$ heeft kans 0 of 1.

  Bewijs:

  $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma(X_1), ..., \sigma(X_n), \sigma(X_k \mid k \geq n+1)$ is een onafhankelijke collectie, en $\mathscr{T} \subset \sigma(X_k \mid k \geq n+1)$ dus $\{\sigma(X_k)\}_{k=1}^{n} \cup \{\mathscr{T}\}$ is onafhankelijk. Dus $\{\sigma(X_k)\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\mathscr{T}\}$ is onafhankelijk. $\sigma(X_k \mid k \geq 1) = \sigma(\cup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k))$, dus $\{\sigma(X_k \mid k \geq 1), \mathscr{T}\}$ is onafhankelijk. $\mathscr{T} \subset \sigma(X_k \mid k \geq 1)$ dus $\mathscr{T}$ is onafhankelijk van $\mathscr{T}$. Er volgt voor $A \in \mathscr{T}$ dat $P(A) = P(A \cup A) = P(A)P(A)$ wegens onafhankelijkheid. Dit kan alleen als $P(A) \in \{0, 1\}$ voor alle $A \in \mathscr{T}$.

- (10.2.6) (*Kolmogorovs Ongelijkheid*) $X_1, ..., X_n$ onafhankelijke $\mathbb{R}$-waardige stochasten met $E(X_i) = 0$, $E(X_i^2) < \infty$. Dan:

$$P(\max_{i \in [n]} |S_i| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)$$

  Bewijs

  Laat $A_m = \{|S_m| > \varepsilon\} \cap \bigcap_{j=1}^{m-1} \{|S_j| \leq \varepsilon\}$, $A = \{\max_{i=1,...,n} |S_i| > \varepsilon\}$, dan $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ *als disjuncte vereniging*, en $\chi_{A_i} S_i$ is $\sigma(X_1, ..., X_i)$-meetbaar terwijl $S_n - S_i$ $\sigma(X_{m+1}, ..., X_n)$ meetbaar is, dus wegens $\{X_1, ..., X_n\}$ onafhankelijk volgt dat $\chi_{A_i} S_i$ en $S_n - S_i$ onafhankelijk zijn, dus de verwachting van het product is het product van de verwachtingen:

$$\int_{A_i} S_i(S_n - S_i) dP = E(\chi_{A_i} S_i) E(S_n - S_i) = E(\chi_{A_i} S_i) \cdot 0 = 0$$

De laatste is 0 wegens $E(X_i) = 0$. Het vervolg is dat we bewijzen $E(\chi_{A_i} S_n^2) \geq E(\chi_{A_i} S_i^2)$ en tenslotte met behulp van termsgewijs Markov's ongelijkheid toepassen dat $\varepsilon^2 P(A) \leq E(S_n^2)$. Het eerste bewijzen we door op te merken $\chi_{A_i} \cdot S_n^2 = \chi_{A_i} \dot{c}(S_i + (S_n - S_i))^2$ en dat de kruisterm to 0 integreert.

$$\begin{aligned}\int_{A_i} S_n^2 dP &= \int_{A_i} S_i^2 dP + \int_{A_i} (S_n - S_i))^2 dP \\ &\geq \int_{A_i} S_i^2 dP\end{aligned}$$

Nu passen we op elke $\chi_{A_i} S_i^2$ Markovs ongelijkheid toe:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 P(A) = \varepsilon^2 P(\cup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon P(A_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} S_i^2 dP \leq \int_{i=1}^n \int_{A_i} S_n^2 dP \\ &= \int S_n^2 dP = E(S_n^2) = \sum_{i=1}^n E(X_i^2)\end{aligned}$$

Het laatste wegens onafhankelijkheid van de X_i $E(X_i) = 0$, waardoor we de rekenregels voor variantie van onafhankelijke sommen direct kunnen toepassen op $E(S_n^2)$ en $E(X_i^2)$.

- (10.2.7) $\{X_n\}_n$ rij onafhankelijke $\mathbb{R}$-waardige stochasten met $E(X_i) = 0$ $\forall i$ en $\sum_n E(X_n^2) < \infty$. Dan $\sum_n X_n(\omega)$ convergeert a.s.

- (10.2.5) (*Sterke Wet van Grote Aantallen*) Zij $\{X_n\}_n$ een rij i.i.d. stochasten met $E(X_1) < \infty$. Dan S_n/n convergeert a.s. naar $E(X_1)$

- (10.2.8) (*Omkering van de Sterke Wet*) $\{X_n\}$ i.i.d. met $E(X_1) = \infty$. Dan $\limsup_n |\frac{S_n}{n}| = \infty$ a.s.

  Bewijs:

  Laat $K \in \mathbb{N}$ vast en bekijk $A_n = \{|X_n| \geq Kn\}$. Er geldt $E(X_1/K)$ is eindig $\iff \sum_{n=1}^\infty P(\{|X_n| \geq n\})$ is eindig, dus $\sum_{n=1}^\infty P(\{|X_1| \geq Kn\}) = \infty$, en aangezien X_n en X_1 dezelfde verdeling hebben $\sum_{n=1}^\infty P(A_n) = \infty$. Omdat $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ onafhankelijk is, impliceert Borel-Cantelli dat $P(\{|X_n| \geq Kn \text{ i.o.}\}) = 1$ Voor $\omega \in \{|X_n| \geq Kn \text{ i.o.}\}$ geldt $\limsup_n |\frac{X_n(\omega)}{n}| \geq K$. dus Als $B_K = \{\limsup_n \frac{|X_n|}{n}| \geq K\}$, dan $P(A_K) = 1$ $\forall K \in \mathbb{N}$ dus $P(\{\limsup_n |\frac{X_n}{n}| = \infty) = P(\cap_{K=1}^\infty A_K) = 1$, dus $\limsup_n |\frac{X_n}{n}|$ is a.s. ∞.

  Verder $\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S_{n-1}}{n-1}$, dus $|\frac{X_n}{n}| \leq |\frac{S_n}{n}| + \frac{n-1}{n} |\frac{S_{n-1}}{n-1}| \implies \limsup_n |\frac{X_n}{n}| \leq 2 \limsup_n |\frac{S_n}{n}|$, dus $\limsup_n |\frac{S_n}{n}| = \infty$ a.s.

10.3

- (*Convergentie in distributie*) Voor een rij kansmaten $\{\mu_n\}_n$ en een kansmaat μ op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ heet $\mu_n \to \mu$ *in distributie* of *zwak convergent* als voor elke continue, begrensde $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu$.

- (10.3.1) (*Uniciteit van de limiet*) Als $\mu_n \to \mu$ en $\mu_n \to \nu$ in distributie, $\nu = \mu$.

  Bewijs: μ en ν zijn regulier (1.5.6), dus het is voldoende om te laten zien dat $\mu(K) = \nu(K)$ op de compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^d$.

  Wegens $\int f d\mu = \lim_n \int f d\mu_n = \int f d\nu$, $\int f d\mu = \int f d\nu$ voor alle $f \in B(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

  Voor $K \subset \mathbb{R}^d$ compact, $d(x, K) = \inf\{d(x, y) \mid y \in K\}$ is continu in x en $d(x, K) = 0 \iff x \in K$ wegens K gesloten. Definieer $f_k(x) := (\chi_K(x) - kd(x, K))^+$, dan is f_k continu en begrensd $|f_k| \le 1$, er geldt dus $\int f_k d\mu = \int f_k d\nu$.

  Omdat $f_k \to \chi_K$ monotoon, nemen we limieten aan beide kanten, en staat er $\mu(K) = \nu(K)$.

- (10.3.2) T.F.A.E:
  - $\mu_n \to \mu$ in distributie
  - $\forall$ *uniform continu, begrensde* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\int f d\mu = \lim_n \int f d\mu_n$
  - $\forall F \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$, $\limsup_n \mu_n(F) \le \mu(F)$
  - $\forall U \in \mathscr{G}(\mathbb{R}^d)$, $\liminf_n \mu_n(U) \ge \mu(U)$
  - $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ met $\mu(\partial B) = 0$, $\mu(B) = \lim_n \mu_n(B)$.

- (10.3.3) Zij nu μ_n en μ kansmaten op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, en F_n, F de distributiefuncties van μ_n, μ. T.F.A.E:
  - $\mu_n \to \mu$ in distributie.
  - $F(t) = \lim_n F_n(t)$ voor alle continuïteitspunten t van F.
  - $F(t) = \lim_n F_n(t)$ voor $t \in D$, $D \subset \mathbb{R}$ dense.

- (10.3.4) Als $z \in \mathbb{C}$, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ en $z = \lim_n z_n$, dan $\lim_n (1 + \frac{z_n}{n})^n = e^z$

  Bewijs: Voor elke $k \in \mathbb{N}_{\ge 0}$ hebben we (noteer de coefficiënt met z_n^k erin een expressie E met $[z_n^k]E$):

  $$[z_n^k]\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} = \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n}\right)\frac{z_n^k}{k!} \to 1^k \cdot \frac{z^k}{k!} \qquad \text{als } n \to \infty$$

  We bekijken nu maatruimte $(\mathbb{N}_{\ge 0}, \mathscr{P}(\mathbb{N}_{\ge 0}), \mu)$ met telmaat $\mu(A) = |A|$. Dan is (noteer $[0, n] = \{0, ..., n\}$):

  $$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} = \int \chi_{[0,n]}(k)\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k}\mu(dk)$$

Terwijl

$$e^z = \int \frac{z^k}{k!}\mu(dk)$$

We kunnen dus definiëren $f_n, f : \mathbb{N}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$

$$f_n(k) = \chi_{[0,n]}(k)\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k}$$
$$f(k) = \frac{z^k}{k!}$$

Dan zegt het voorgaande samen met $\chi_{[0,n]} \to 1$ precies dat $f_n \to f$ puntsgewijs. $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \to e^z$ is equivalent met gelijkheid van de integralen. We hebben dus een convergentiestelling nodig om dit te verkrijgen.

Aangezien $z_n \to z$, is de rij en z begrensd, neem dus $M = \sup\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \cup \{z\} < \infty$, dan zien we dat:

$$\left|\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k}\right| = \left(\prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{n}\right)\frac{M^k}{k!} \leq \frac{M^k}{k!}$$

Dus $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 0}, |f_n(k)| \leq M^k/k!, |f(k)| \leq M^k/k!$ en $M^k/k! \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_{\geq 0}, \mathscr{P}(\mathbb{N}_{\geq 0}), \mu)$, dus de gedomineerde convergentiestelling is van toepassing en we kunnen reeks en limiet verwisselen:

$$\begin{aligned}
\lim_n \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n &= \lim_n \int \chi_{[0,n]}(k)\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k}\mu(dk) \\
&= \int \left[\lim_n \chi_{[0,n]}(k)\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k}\right]\mu(dk) \\
&= \int \frac{z^k}{k!}\mu(dk) \\
&= e^z
\end{aligned}$$

- De *Fourier-transformatie* $\phi_\mu : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ van een kansmaat μ op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ is gedefinieerd als $\phi_\mu(t) = \int \exp(i\langle t, x\rangle)\mu(dx)$. Hier is $\langle -, - \rangle$ het standaard inproduct op $\mathbb{R}^d$. Voor $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ een stochast op kansruimte $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ definiëren we $\phi_X = \phi_{P_X}$.
- (10.3.5)
  - $\phi_\mu(0) = 1$
  - $|\phi_\mu(t)| \leq 1, \ \forall t \in \mathbb{R}^d$
  - ϕ_μ is continu op $\mathbb{R}^d$.

  Bewijs:

- $\phi_\mu(0) = \int 1 d\mu = \mu(\mathbb{R}^d) = 1$
- $|\phi_\mu(t)| = |\int e^{i\langle t,x\rangle}\mu(dx)| \leq \int |e^{i\langle t,x\rangle}|\mu(dx) = \int 1 d\mu = \mu(\mathbb{R}^d) = 1$
- Omdat $\mathbb{R}^d$ een metrische ruimte is, volstaat het te laten zien dat ϕ_μ rijcontinu is. Laat $t \in \mathbb{R}^d$ en $t_n \to t$. De functies $f_n : x \mapsto e^{i\langle t_n,x\rangle}$ en $f : x \mapsto e^{i\langle t,x\rangle}$ worden puntsgewijs gedomineerd door $1 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{C}, \mu)$, en $e^{i\langle t_n,x\rangle} \to e^{i\langle t,x\langle}$ puntgewijs voor $x \in \mathbb{R}^d$, dus volgt met de gedomineerde convergentiestelling:

$$\lim_n \phi_\mu(t_n) = \lim_n \int \exp(i\langle t_n, x\rangle)\mu(dx) = \int \exp(i\langle t, x\rangle)\mu(dx) = \phi_\mu(t)$$

  Dit voor willekeurige rijen bewijst continuïteit.

- (10.3.6) Als X een $\mathbb{R}^d$-waardige stochast op $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ is en $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $b \in \mathbb{R}^d$, dan $\phi_{A\cdot X+b}(t) = e^{i\langle t,b\rangle}\phi_X(A^\top t)$.

  Bewijs

$$E(e^{i\langle t,AX+b\rangle} = E(e^{i\langle t,AX\rangle+\langle t,b\rangle}) = e^{i\langle t,b\rangle}E(e^{i\langle A^\top t,x\rangle}) = e^{i\langle t,b\rangle}\phi_X(A^\top t)$$

- (10.3.7) Als μ een kansmaat op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ is met eindig n-de moment, dan heeft ϕ_μ continue afgeleiden tot en met orde n, gegeven door

$$\phi_\mu^{(k)}(t) = i^k \int x^k e^{itx}\mu(dx)$$

- Enigszins gelijkend aan Cohn noteren we met γ de standaard-normale Gaussische maat, γ_σ de Gaussische maat met variantie σ^2, γ_{μ,σ^2} de Gaussische maat met verwachting μ en variantie σ^2, allen op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. De Radon-Nikodym afgeleiden met betrekking tot de Lebesgue-maat schrijven we als g, g_σ, $g_{\mu,\sigma}$. Herinner dat:

$$g_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  Tevens definiëren we dan de maat γ^d, γ_σ^d, $\gamma_{\mu,\sigma}^d$ als de d-voudige productmaten $\gamma \times .... \times \gamma$, enzovoort, op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ (herinner hierbij dat $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)^{\times d} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$). Deze hebben dichtheden $g_{\mu,\sigma}^d(t_1, ..., t_d) = \prod_{i=1}^d g_{\mu,\sigma}(t_i)$.

- (10.3.8) Als $\gamma_{\mu,\sigma}$ de normale verdeling op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ is met verwachting μ en variantie σ^2, dan

$$\phi_\gamma(t) = e^{i\mu t}e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

  Bewijs: We beginnen met de standaardnormale verdeling.

$$\phi_P(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ixt}e^{-x^2/2}dx$$

γ heeft eindige momenten van elke orde en dis volgt met 10.3.7 ook:

$$\begin{aligned}
\phi'_\gamma(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int ixe^{ixt}e^{-x^2/2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int ie^{ixt}\frac{d(-e^{-x^2/2})}{dx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left([-ixe^{ixt}e^{-x^2/2}]_{-\infty}^{+\infty} - \int -i^2te^{ixt}e^{-x^2/2}dx\right) \\
&= -t\phi_\gamma(t)
\end{aligned}$$

Dus $\frac{d}{dt}e^{t^2/2}\phi_\gamma(t) \equiv 0$, en wegens $\phi_\gamma(0) = 1$ volgt dus dat $\phi_\gamma(t) = e^{-t^2/2}$ (unieke oplossing van het IVP). Voor een algemene Gaussische verdeling $X \sim \gamma_{\mu,\sigma}$ geldt nu wegens 10.3.6, dat $X = \sigma U + \mu$ met $U \sim \gamma$, dus:

$$\phi_{\gamma_{\mu,\sigma}}(t) = e^{i\mu t}\phi_\gamma(\sigma t) = e^{i\mu t}e^{-\sigma^2t^2/2}$$

- (10.3.9) Als ν_1 en ν_2 kansmaten zijn op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ en $\nu = \nu_1 * \nu_2$, dan $\phi_\nu = \phi_{\nu_1} \cdot \phi_{\nu_2}$ puntsgewijs.

  Bewijs: Zij X_1, X_2 onafhankelijke r.v. met verdelingen ν_1, ν_2. Dan heeft $X_1 + X_2$ verdeling ν en dus volgt:

$$\begin{aligned}
\phi_\nu(t) &= E(e^{i\langle t, X_1+X_2\rangle}) = E(e^{i\langle t,X_1\rangle}e^{i\langle t,X_2\rangle}) \\
&= E(e^{i\langle t,X_1\rangle})E(e^{i\langle t,X_2\rangle}) = \phi_{\nu_1}(t)\phi_{\nu_2}(t)
\end{aligned}$$

- Als ν_1, ν_2 kansmaten zijn op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, en $\nu = \nu_1 \times \nu_2$, dan:

$$\phi_\nu(t_1, t_2) = \phi_{\nu_1}(t_1)\phi_{\nu_2}(t_2)$$

  Bewijs: Zij X_1, X_2 onafhankelijke r.v. met verdelingen ν_1, ν_2. Dan heeft (X_1, X_2) verdeling ν en dus volgt:

$$\begin{aligned}
\phi_\nu(t) &= E(e^{i\langle (t_1,t_2),(X_1,X_2)\rangle}) \\
&= E(e^{it_1X_1+it_2}) = E(e^{it_1X_2}e^{it_2X_2}) \\
&= E(e^{it_1X_1})E(e^{it_2X_2}) = \phi_{\nu_1}(t_1)\phi_{\nu_2}(t_2)
\end{aligned}$$

  Gevolg: $\phi(\gamma^d_{\mu,\sigma})(t_1, ..., t_d) = \prod_{i=1}^d \phi_{\mu_i,\sigma}(t_i)$.

- (10.3.10) (*Fourier inversie*) Bekijk de Gaussische maat γ_σ op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ en de d-de productmaat op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, γ_σ^d met dichtheid $g^d_\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (de simultane verdeling van d onafhankelijke $X_1, ..., X_d$ allen $\sim \gamma_\sigma$), dan:

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,t\rangle}\phi(\gamma^d_{\mu,\sigma})(t)\lambda(dt) = g^d_{\mu,\sigma}(x)$$

Bewijs: Voor $d = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}\phi(\gamma_{\mu,\sigma})(t)dt &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}e^{-\sigma^2 t^2/2}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-xt}e^{-\sigma^2 t^2/2}dt \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sigma}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ixt}e^{-\frac{t^2}{2\frac{1}{\sigma^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2} = (2\pi)g_{\mu,\sigma}(x)
\end{aligned}$$

Voor algemene d gebruiken we Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,t\rangle}\phi(\gamma^d_{\mu,\sigma})(t)dt &= \int_{\mathbb{R}^d} (\prod_{j=1}^{d} e^{-ix_jt_j}\phi(\gamma_{\mu_j,\sigma})(t_j))dt \\
&= \prod_{j=1}^{d}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_jt_j}\phi(\gamma_{\mu_j,\sigma})(t_j)dt_j\right) \\
&= (2\pi)^d\prod_{i=1}^{d} g_{\mu_j\sigma}(x_j) = (2\pi)^d g^d_{\mu,\sigma}(x)
\end{aligned}$$

Gevolg: Dit laat zien dat de Fourier-inversie operator ψ, op $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{C}, \lambda)$ gedefinieerd als:

$$\psi(f)(x) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,t\rangle}f(t)\lambda(dt)$$

geldt, dat $\psi(\phi(\gamma^d_{\mu,\sigma})) = g^d_{\mu,\sigma}$. Niet alle kansmaten gedragen zich zo goed met betrekking tot Fourier-inversie, maar het is voldoende om injectiviteit van de Fourier-transformatie te bewijzen:

- (10.3.11) Als μ en ν kansmaten op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ zijn, dan $\nu = \mu$ dan en slechts dan als $\phi_\nu = \phi_\mu$.

  Bewijs: We bewijzen uiteraard alleen $\Longleftarrow$. We doen dit door de Fourier-inverse van de convolutie met $\gamma_\sigma^{\times d}$ uit te rekenen en Fubini te gebruiken:

$$\begin{aligned}
\psi(\phi(\gamma_\sigma^d * \mu))(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,t\rangle}\phi(\gamma_\sigma^d)(t)\cdot\phi(\mu)(t)dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{-i\langle x,t\rangle}\phi(\gamma_\sigma^d)(t)\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle y,t\rangle}\mu(dy)\right)dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,t\rangle}\phi(\gamma_\sigma^d)(t)e^{i\langle y,t\rangle}\mu(dy)\right)dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x-y,t\rangle}\phi(\gamma_\sigma^d)(t)\mu(dy)\right)dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x-y,t\rangle}\phi(\gamma_\sigma^d)(t)dt\right)\mu(dy) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} g_\sigma^d(x-y)\mu(dy) = \frac{d}{d\lambda}(\gamma_\sigma^d * \mu)
\end{aligned}$$

We mogen hier Fubini gebruiken omdat μ eindig is en $\phi(\gamma_\sigma)$ is λ-integreerbaar. Dit geeft dus dat $\psi(\phi(\gamma_\sigma^d)) = \frac{d}{d\lambda}(\gamma_\sigma^d * \mu)$. Hetzelfde kan voor ν aangetoond worden. Omdat $\phi(\nu) = \phi(\mu)$ volgt dat $\gamma_\sigma^d * \mu = \gamma_\sigma^d * \nu$ voor alle $\sigma > 0$.

$\gamma_\sigma^d * \mu \to \mu$ in distributie als $\sigma \to 0$, dus $\mu = \nu$ volgt omdat limieten van in distributie convergerende rijen van kansmaten op $\mathbb{R}^d$ uniek zijn (10.3.1).

Een gevolg is dat we de volgende omkering kunnen bewijzen:

- (10.3.12) Zij $X_1, ..., X_n$ $\mathbb{R}$-waardige stochasten op dezelfde kansruimte $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ en zij $X = (X_1, ..., X_d)$ een $\mathbb{R}^d$-waardige stochast. Dan zijn $X_1, ...X_d$ onafhankelijk dan en slechts dan als $\phi_X(t_1, ..., t_d) = \prod_{i=1}^d \phi_{X_i}(t_i)$

  Bewijs: Het idee voor $\implies$ zagen we al onder 10.3.9. Stel nu andersom dat $\phi_X(t_1, ..., t_d) = \prod_{i=1}^d \phi_{X_i}(t_i)$. Laat μ_X en $\mu_{X_1}, ... , \mu_{X_d}$ de kansmaten van X en $X_1, ..., X_d$ op $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}$ respectievelijk.

  Wegens $\implies$ geldt: voor de productmaat, $\nu = \mu_{X_1} \times ... \times \mu_{X_d}$ geldt $\phi_\nu(t_1, ..., t_d) = \prod_{i=1}^d \phi_{\mu_{X_i}}(t_i)$. Dus als $\phi_X(t_1, ..., t_d) = \prod_{i=1}^d \phi_{X_i}(t_i)$, dan $\phi_\nu = \phi_{\mu_X}$, dus $\mu_X = \mu_{X_1} \times ... \times \mu_{X_d}$ volgt nu op grond van de uniciteitsstelling. En dit betekent precies (zie 10.1) dat $X_1, ..., X_d$ onafhankelijk zijn.

- Elke kansmaat μ op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ is eindig en daarom regulier. Er geldt dus ook

  $$\sup\{\mu(K) : K \text{ compact }\} = \mu(\mathbb{R}^d) = 1$$

  Een kansmaat maat die deze eigenschap heeft heet ook wel *strak*. Meer in het algemeen, als $(X, \mathscr{G})$ een Hausdorff topologische ruimte is en $\mathscr{A}$ een σ-algebra met $\mathscr{G} \subset \mathscr{A}$, dan heet μ een (getekende/ complexe) maat op $(X, \mathscr{A})$, *strak* als voor elke $\varepsilon > 0$ er een $K \subset X$ compact is met $|\mu|(X \backslash K) < \varepsilon$.

  In het geval van een kansmaat vertaalt dit inderdaad naar $\mu(K) > 1 - \varepsilon$, dus is equivalent met de supremumconditie.

Een collectie $\{\mu_i\}_{i\in I}$ van (getekende / complexe) maten heet *uniform strak* als er voor elke ε een K compact is met

$$\forall i \in I : |\mu_i|(X\backslash K) < \varepsilon$$

- (10.3.13) Als μ een kansmaat is op $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. Dan voor elke $\varepsilon > 0$ geldt

$$\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : |x| > \frac{2}{\varepsilon}\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(1-\phi(\mu)(t))dt$$

In het bijzonder is de integraal rechts reëelwaardig.

Bewijs: Met Fubini:

$$\begin{aligned}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\phi(\mu)(t)dt &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\mu(dx)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\cos tx + i\sin tx)dt\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}}\frac{2\sin(\varepsilon x)}{x}\mu(dx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(1-\phi(t))dt &= \frac{1}{2\varepsilon}\left(2\varepsilon - \int_{\mathbb{R}}\frac{2\sin\varepsilon x}{x}\mu(dx)\right) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin\varepsilon x}{\varepsilon x}\right)\mu(dx) \\ &\geq \int_{\{x:|\varepsilon x|\geq 2\}}\frac{1}{2}\mu(dx) = \frac{1}{2}\mu(\{x : |\varepsilon x| \geq 2\})\end{aligned}$$

De ongelijkheid wegens $1 - \frac{\sin\varepsilon x}{\varepsilon x} \geq \frac{1}{2}$ als $|\varepsilon x| \geq 2$.

- (10.3.15) Als $\{\mu_n\}$ een uniform strakke rij van kansmaten op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ is, dan heeft $\{\mu_n\}$ een deelrij die in distributie convergeert naar een kansmaat op $(\mathbb{R}.\mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Bewijs: Laat F_n de rij van verdelingsfuncties $F_n(x) := \mu((-\infty, x])$ zijn bij $\{\mu_n\}$ en zij D een aftelbare dichte verzameling in $\mathbb{R}$, zoals $\mathbb{Q}$, met $\{q_n\}$ een enumeratie van $\mathbb{Q}$. Aangezien $[0,1]$ compact is heeft elke $[0,1]$-waardige rij een convergente deelrij.

  - Laat $\{F_{1,n}\}$ een deelrij van $\{F_n\}$ zijn zodat $F_{1,n}(x_1)$ convergent is.
  - $\{F_{k+1,n}\}_n$ een deelrij van $\{F_{k,n}\}$ zijn zodat $F_{k+1,n}(x_k)$ convergent is.
  - Laat tenslotte $F_{k,k}$ de diagonaalrij zijn. Er geldt dat $F_{k,k}(x_n)$ convergent is voor elke $n \in \mathbb{N}$, dus $F_{k,k}$ convergeert puntsgewijs naar een limietfunctie $G_0 : \mathbb{Q} \to [0,1]$. Zij $\mu_{n,j}$ de corresponderende deelrij van μ_n.

We laten zien dat μ_{n_j} convergeert naar een kansmaat μ. Hier wordt het uniform strak zijn van de collectie $\{\mu_n\}_n$ cruciaal. Namelijk als volgt: we willen G_0 graag uitbreiden tot

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(x) := \inf\{G_0(d) : q \in \mathbb{Q},\ q > x\}$$

Dan is G:

1. Niet-dalend omdat G_0 niet-dalend is: immers, als $q, p \in \mathbb{Q}$, $q \leq p$, $G_0(q) = \lim_k F_{k,k}(q) \leq \lim_k F_{k,k}(p) = G_0(p)$.
2. Rechts-continu: neem $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ willekeurig en laat met de inf-eigenschap $q \in \mathbb{Q}$ zo gekozen zijn dat $q > x$ en $G_0(q) < G(x) + \varepsilon$. Dan voor $\tilde{x} \in [x, q)$ geldt $G(\tilde{x}) \in [G(x), G_0(q)] \subset [G(x), G(x) + \varepsilon)$. Dus G is rechts-continu.
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, en $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$: Er geldt in elk geval $\forall n \in \mathbb{N} : \forall q \in \mathbb{Q} : F_{n,n}(q) \in [0, 1]$ (omdat elke compacte $K \subset \mathbb{R}$ verzameling bevat is in een interval $K \subset (-R, R] \subset \mathbb{R}$, dus geldt voor alle $\varepsilon > 0$ is er een compacte $K \subset \mathbb{R}$ (met uniforme strakheid) en deze geeft een $R > 0$ met:

   $$\forall n \in \mathbb{N} : F_{n,n}(R) - F_{n,n}(-R) = \mu_n((-R, R]) \geq \mu_n(K) > 1 - \varepsilon$$

   Dat betekent dus met $0 \leq F_{n,n}(-R) \leq f_{n,n}(R) \leq 1$ en monotoniciteit van $F_{n,n}$ dat $F_{n,n}(-q) < \varepsilon$, $F_{n,n}(q) > 1 - \varepsilon$, voor $q \in \mathbb{Q}$ met $q > R$, dus $G_0(-q) > \varepsilon$, $G_0(q) > 1 - \varepsilon$ en daarmee (eigenlijk spellen we hier uit dat R uniform in n is gevonden) omdat D dense is volgt dus

   $$\lim_{\mathbb{Q} \ni x \to \infty} G_0(x) = 1 \qquad \lim_{Q \ni x \to -\infty} G_0(x) = 0$$

   Om hetzelfde nu voor G te zien, neem $\varepsilon > 0$ en zij $R > 0$ z.d.d. voor $q \in \mathbb{Q}$, $G_0(q) < \varepsilon$ voor $q < -R$ en $G_0(q) > 1 - \varepsilon/2$ voor $q > R$. Dan voor $x \in \mathbb{R}$, $x < -R$, neem een $x < q < -R$, dan $G(x) \leq G_0(q) < \varepsilon$, de eerste ongelijkheid per definitie van G. En voor $x \in \mathbb{R}$, $x > R$, neem een $\mathbb{Q} \ni q > x$ met $G_0(q) < G(x) + \varepsilon/2$, wegens de infinimum-eigenschap bestaat deze q. Bovendien $q > x > R$, dus $G_0(q) > 1 - \varepsilon/2$. We vinden $G(x) > G_0(q) - \varepsilon/2 > 1 - \varepsilon$. Dit laat zien dat ook $\lim_{x \to \infty} G(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} G(x) = 1$.

Dus G definieert een maat μ op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ (1.3.10).

Merk nu op dat niet noodzakelijk geldt dat $F_{j,j}(x) \to G(x)$ voor $\in \mathbb{Q}$, omdat G_0 niet noodzakelijk samenvalt met G op $\mathbb{Q}$ (dat is niet hoe G gedefinieerd is). Om te laten zien dat $\mu_{n_k} \xrightarrow{d} \mu$, gebruiken we een ander argument: $F_{k,k}(x)$ convergeert naar $G(x)$ voor continuïteitspunten x van G.

Zij $x \in \mathbb{R}$ een continuïteitspunt van G, zij $\varepsilon > 0$ en zij $t_0, t_1 \in \mathbb{Q}$ met $x \in (t_0, t_1)$ en $G(x) < G_0(t_1) + \varepsilon$, $G(x) - \varepsilon < G_0(t_0)$. Dat eerste is simpelweg de inf-eigenschap, het tweede vereist continuïteit: kies eerst een $\delta > 0$ met $G((x - \delta, x + \delta)) \subset (G(x) - \varepsilon, G(x) + \varepsilon)$ en vervolgens een $t_0 \in (x - \delta, x) \cap \mathbb{Q}$. Als $j \geq N_1$ groot genoeg dat $|F_{j,j}(t_1) - G_0(t_1)| < \varepsilon$, en $j \geq N_0$ groot genoeg dat $|F_{j,j}(t_0) - G_0(t_0)| < \varepsilon$, dan volgt

$$F_{j,j}(x) \leq F_{j,j}(t_1) < G_0(t_1) + \varepsilon < G(x) + 2\varepsilon$$
$$F_{j,j}(x) \geq F_{j,j}(t_0) > G_0(t_0) - \varepsilon > G(x) - 2\varepsilon$$

Dus $G(x) = \lim_j F_{j,j}(x)$ voor x waar G continu is, en er volgt dat μ_{n_j} in distributie naar μ convergeert.

- (10.3.15) Laat μ en $\{\mu_n\}_n$ een kansmaat en een rij kansmaten op $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ zijn. Dan convergeert μ_n in distributie naar μ dan en slechts dan als φ_μ puntsgewijs naar ϕ_μ convergeert.

  Bewijs Voor elke $t \in \mathbb{R}$ is de functie $x \mapsto e^{ixt}$ begrensd en continu als functie $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (níet als functie $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, maar we integreren over $\mathbb{R}$). Dus als $\mu_n \to \mu$ in distributie, dan volgt uit de definitie dat $\int e^{itx}\mu_n(dx) \to \int e^{itx}\mu(dx)$ voor elke $t \in \mathbb{R}$, dus $\phi_{\mu_n}(t) \to \phi_\mu(t)$ voor elke $t \in \mathbb{R}$, dus $\phi_{\mu_n} \to \phi_\mu$ puntsgewijs op $\mathbb{R}$.

  Andersom, neem aan dat ϕ_{μ_n} puntsgewijs naar ϕ_μ convergeert. We laten eerst zien dat als gevolg $\{\mu_n\}$ uniform strak is. Voor $\varepsilon > 0$ willekeurig, gebruik continuïteit van ϕ_μ bij 0 om een $\delta > 0$ te vinden zodat

  $$\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1 - \phi_\mu(t))dt < \varepsilon$$

  Omdat $\phi_{\mu_n} \to \phi_\mu$ puntsgewijs, en $\chi_{[-\delta,\delta]}(1 - \phi_{\mu_n})$, $\chi_{[-\delta,\delta]}(1 - \phi_\mu)$ zijn gedomineerd door $2\chi_{[-\delta,\delta]}$, welke λ-integreerbaar zijn, kunnen we concluderen dat

  $$\lim_n \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1 - \phi)\mu_n(t))dt \leq \varepsilon$$

  In het bijzonder $\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1 - \phi)\mu_n(t))dt < 2\varepsilon$ voor alle voldoende grote n. We herschalen dit naar ε. Propositie 10.3.13 geeft dan

  $$\mu_n\left(\left[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta}\right]\right) > 1 - \varepsilon,\ \forall n \geq N$$

  We kunnen dan δ minimaal kiezen zodat het ook voor $n \in \{1, ..., N-1\}$ geldt, en dan geldt het dus voor alle $n \in \mathbb{N}$. We zien dus dat $\{\mu_n\}$ uniform strak is, want $[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta}]$ is compact.

  De rest is toepassing van uniciteit van ϕ_μ, uniciteit van limieten in distributie, en 10.3.14: Stel dat er een begrensde continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is zodat

  $$\lim_n \int f d\mu_n \neq \int f d\mu$$

  Omdat $\{\int f d\mu_n\} \subset [-B, B]$ voor $B = \sup_{\mathbb{R}} f < \infty$, volgt dat er wel een deelrij μ_{n_k} moet zijn zodat $\{\int f d\mu_{n_k}\}_k$ convergeert. Omdat $\{\mu_{n_k}\}_k$ evenzeer uniform strak is, laat $\mu_{n_{k_j}}\}_j$ een deelrij zijn die convergeert naar een kansmaat ν (10.3.14). Dan $\lim_j \phi_{\mu_{n_{k_j}}} = \phi_\nu$ wegens de eerste implicatie van deze propositie, en wegens diezelfde implicatie ook $\lim_j \phi_{\mu_{n_{k_j}}} = \phi_\mu$. $\nu = \mu$ dus (10.3.11), maar dat is uitgesloten omdat $\int f d\nu \neq \int f d\mu$. Contradictie, en we concluderen dat $\mu_n \to \mu$ in distributie.

- We zijn nu toegekomen aan het kroonjuweel van deze paragraaf, de Centrale Limietstelling. Als laatste voorbereiding, het volgende: Als X een $\mathbb{R}$-waardige stochast met gemiddelde 0 en variantie 1 is, en ϕ is de karakteristieke functie, dan

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= 1, \\
\phi'(0) &= i^1 \int x^1 e^{i0x} P_X(dx) = E(X) = 0, \\
\phi''(0) &= i^2 \int x^2 e^{i0x} P_X(dx) = -1 \cdot \mathrm{Var}(X) = -1
\end{aligned}$$

Verder heeft ϕ continue afgeleiden, tenminste tot op tweede orde. l'Hospital's regel geeft dan:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x) - (1 - \frac{x^2}{2})}{x^2} = 0$$

In andere woorden, $\phi(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + R(x)$ met $R(x) \in o(x^2)$.

(10.3.16) ***Centrale Limietstelling***

Laat $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij van i.i.d. $\mathbb{R}$-waardige stochasten zijn met verwachting μ en variantie σ^2, en zij $S_n = X_1 + ... + X_n$. Definieer de rij $\{U_n\}_n$ als volgt.

$$U_n = \frac{(S_n - n\mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

Dan convergeert de rij kansmaten $\{P_{U_n}\}_n$ in distributie naar γ, de Gaussische kansmaat met verwachting 0 en variantie 1.

Bewijs:

Elke stochast $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ heeft gemiddelde 0 en verwachting 1, dus de karakteristieke functie ϕ van deze stochast heeft Maclaurin-expansie zoals in het voorgaande.

Nu merken we op dat $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma}$, dus wegens onafhankelijkheid van de stochasten $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ en de schaling met $\frac{1}{\sqrt{n}}$ volgt met 10.3.9 en 10.3.4 dat de karakteristieke functie van U_n gegeven is door

$$\phi_{U_n}(t) = \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + R\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2/2 + \varepsilon_n(t)}{n}\right)^n$$

Hierbij is $\varepsilon_n(t) = -nR(t/\sqrt{n})$. Wegens $R(t/\sqrt{n}) \in o(t^2/n)$ volgt

$$\lim_n \varepsilon_n(t) = -\lim_n nR(t/\sqrt{n}) = t^2 \lim_n \frac{R(t/\sqrt{n})}{t^2/n} = 0, \quad \text{als } t \neq 0$$

Voor $t = 0$ geldt de limiet natuurlijk ook gezien $R(0) = 0 = \lim_n 0R(0/\sqrt{n})$.

Dus $z_n(t) := t^2/2 - \varepsilon_n(t)$ is een rij die naar $t^2/2$ convergeert. Met lemma 10.3.4 volgt dat:

$$\phi_{U_n}(t) = \left(1 - \frac{z_n}{n}\right)^n \to e^{-t^2/2} = \phi_\gamma(t)$$

Dus $\phi_{U_n} \to \phi_\gamma$ puntsgewijs, en daarmee $P_{U_n} \to \gamma$ in distributie wegens 10.3.15.

10.4

- Als $A, B \in \mathscr{A}$ met $P(B) \neq 0$, dan definieert men in basiscursussen kansrekening $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Als $X : \Omega \to \mathbb{R}$ r.v. is en $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ een sub-σ-algebra, dan is $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ een *voorwaardelijke verwachting* voor X gegeven $\mathscr{B}$ als Y $\mathscr{B}$-meetbaar is en $\forall B \in \mathscr{B} : \int_B Y dP = \int_B X dP$. We noemen een Y die voldoet een $E(X|\mathscr{B})$, en een *versie* van de voorwaardelijke verwachting.

  Het idee: Events uit $\mathscr{B}$ geven informatie over de uitkomst; we kunnen stochasten onderscheiden op basis van hun integralen over $B \in \mathscr{B}$ (hoe groter $\mathscr{B}$, des te meer stochasten zijn op die manier onderscheidbaar). We willen een stochast die "op basis van die informatie" een verwachting "uitrekent", of anders gezegd, die niet te onderscheiden is van X door integralen over events B uit $\mathscr{B}$

  Neem bijvoorbeeld de vrije Bernoulli-wandeling $S_n = Y_1 + ... + Y_n$ $[n \in \mathbb{N}]$ waarbij $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d. zijn met $P(Y_i = 1) = p$, $P(Y_i = -1) = q := 1 - p$. Dan kunnen we definiëren: $E(S_n \mid S_{n-1}) := E(S_n \mid \sigma(S_{n-1}))$, d.w.z. gegeven willekeurige informatie $B \in \sigma(S_{n-1})$, wat is "de verwachting van S_n". Nemen we $Z_n := S_{n-1} + p - q$,dan is dit een voorwaardelijke verwachting want:

  - Z_n is $\sigma(S_{n-1})$-meetbaar (het is immers een functie van S_n).
  - We berekenen:

$$\begin{aligned}
\int_B S_n dP &= \int_B [S_{n-1} + Y_n] dP \\
&= \int_B S_{n-1} dP + \int \chi_B Y_n dP \\
&= \int_B S_{n-1} dP + P(B)E(Y_n) \\
&= \int_B S_{n-1} dP + \int_B [p - q] dP \\
&= \int_B [S_{n-1} + p - q] dP
\end{aligned}$$

Deze eigenschap maakt de vrije Bernoulli-wandeling $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ met als filtratie $\{\sigma(S_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en parameter $p = \frac{1}{2}$ een *martingaal*, zie onder.

- (10.4.2) Voor $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ een kansruimte en $X : \Omega \to \mathbb{R}$ r.v. en $E(X) < \infty$, $\mathscr{B}$ sub-σ-algebra van $\mathscr{A}$, dan

  - X heeft een conditionele verwachting.
  - Als Y_1, Y_2 versies van $E(X|\mathscr{B})$ zijn, dan $Y_1 = Y_2$ P-a.e. (a.s.) op de maatruimte $(\Omega, \mathscr{B}, P)$

  Bewijs:

  - Stel $X \geq 0$, dan $0 \leq \int X dP < \infty$, dus $\nu(B) = \int_B X dP$ definieert een eindige maat op $(\Omega, \mathscr{B})$ want elke $B \in \mathscr{B}$ heeft χ_B is $\mathscr{A}$-meetbaar, dus dit is welgedefinieerd. Bovendien is $\nu \ll P$, want $P(B) = 0 \implies \chi_B X = 0$ P-a.e dus $\int_B X dP = 0$. $\nu(\Omega) = E(X) < \infty$, dus ν is eindig.

    Er volgt met Radon-Nikodym dat er een $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ is die $\mathscr{B}$-meetbaar is met $\int_B Y dP = \nu(B) = \int_N X dP$ $\forall B \in \mathscr{B}$. Y is dus een $E(X|\mathscr{B})$.

    Als $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dan is $E(X^+) < \infty$ en $E(X^-) < \infty$ dus laat Y een $E(X^+|\mathscr{B})$ zijn en Z een $E(X^-|\mathscr{B})$. Dan $\int_B X dP = \int_B X^+ dP + \int_B X^- dP = \int_B Y dP - \int_B Z dP = \int_B (Y - Z) dP$, de laatste gelijkheid omdat Y, Z beide integreerbaar zijn. $Y - Z$ is $\mathscr{B}$-meetbaar, dus wegens de voorgaande gelijkheid een $E(X|\mathscr{B})$.
  - Als Y_1, Y_2 versies van $E(X|\mathscr{B})$ zijn, dan $\int_\Omega |Y_i| dP = \int_\Omega |X| dP = E|X| < \infty$, dus Y_1, Y_2 zijn integreerbaar, dus $\int_B (Y_1 - Y_2) dP = \int_B (X - X) dP = 0$, $\forall B \in \mathscr{B}$, dus ook voor $B = \{Y_1 \geq Y_2\}$ en $B^c = \{Y_1 < Y_2\}$, dus $\int (Y_1 - Y_2)^+ dP = 0$, $\int (Y_1 - Y_2^- dP = 0$, dus $Y_1 - Y_2 = 0$ P-a.e. dus $Y_1 = Y_2$ P-a.e.

- (10.4.3) Als $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ een kansruimte is en $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}_0$ sub-σ-algebras van $\mathscr{A}$ en X, Y $\mathbb{R}$-waardige r.v. op $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ met $E(|X|) < \infty$, $E(|Y|) < \infty$, dan

  - Als $a, b \in \mathbb{R}$, $E(aX + bY|\mathscr{B}) = aE(X|\mathscr{B}) + bE(Y|\mathscr{B})$ a.s.
  - Als $X \leq Y$ a.s., dan $E(X|\mathscr{B}) \leq E(Y|\mathscr{B})$ a.s.
  - $\|E(X|\mathscr{B})\|_1 \leq \|X\|_1$
  - Als X $\mathscr{B}$-meetbaar is, $E(X|\mathscr{B}) = X$ a.s.
  - Als $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$, dan $E(E(X|\mathscr{B})|\mathscr{B}_0) = E(X|\mathscr{B}_0)$ a.s.
  - Als $\mathscr{B}$ en X onafhankelijk zijn (dus $\mathscr{B}$ en $\sigma(X)$ onafhankelijk), dan $E(X|\mathscr{B}) = E(X)$
  - Als X $\mathscr{B}$-meetbaar en begrensd is, dan $E(XY|\mathscr{B}) = XE(Y|\mathscr{B})$ a.s.

  Bewijs:

– X, Y zijn P-integreerbaar dus $aX + bY$ is P-integreerbaar dus er bestaat een $E(aX + bY \mid \mathscr{B})$. Onder integreerbaarheid van X, Y kunnen we lineariteit van de integraal gebruiken: voor $B \in \mathscr{B}$ geldt dan:

$$\begin{aligned}\int_B (aX + bY)dP &= a\int_B XdP + b\int_B YdP \\ &= a\int E(X|\mathscr{B})dP + b\int E(Y|\mathscr{B})dP \\ &= \int_B [aE(X|\mathscr{B}) + bE(Y|\mathscr{B})]dP\end{aligned}$$

Dus $aE(X|\mathscr{B}) + bE(Y|\mathscr{B})$ is een $E(aX + bY|\mathscr{B})$.

- (*Monotone en Gedomineerde convergentie voor Voorwaardelijke Verwachting*) Zij $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ kansruimte, $\mathscr{B}$ sub-σ-algebra van $\mathscr{A}$ en $X_1, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ stochasten met $E|X_i| < \infty$ en $\lim_n X_n$ bestaat a.s. Als één van de volgende geldt:

  – $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ is a.s. stijgend en $\lim_n E(X_n)$ eindig
  – Er is een $[0, \infty)$-waardige stochast Y met $E(Y)$ eindig zodat $|X_n| \leq Y$ a.s.

  Dan $E(\lim_n X_n)$ is eindig en $E(\lim_n X_n|\mathscr{B}) = \lim_n E(X_n|\mathscr{B})$ bijna zeker.

  Bewijs:

  Neem eerst aan X_n $[0, \infty)$-waardig. Dan geeft de MCT:

$$\infty > \lim_n E(X_n) = \lim_n \int X_n dP = \int \lim_n X_n dP = E(\lim_n X_n)$$

  Dus $\lim_n X_n$ heeft eindige verwachting en dus is er een voorwaardelijke verwachting $E(\lim_n X_n|\mathscr{B})$. Omdat $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, volgt dat $0 \leq E(X_n|\mathscr{B}) \leq E(X_{n+1}|\mathscr{B})$ a.s., dus de MCT is van toepassing op $E(X_n|\mathscr{B})$. Vermenigvuldigen met χ_B voor $B \in \mathscr{B}$ verandert de toepasbaarheid van de MCT niet, dus:

$$\int_B \lim_n X_n dP = \lim_n \int_B X_n dP = \lim_n \int_B E(X_n|\mathscr{B})dP = \int_B \lim_n E(X_n|\mathscr{B})dP$$

  Dit geeft dat $\lim_n E(X_n|\mathscr{B})$ een voorwaardelijke verwachting $E(\lim_n X_n|\mathscr{B})$ is.

  Als $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ $\mathbb{R}$-waardig is, dan is $E(X_1)$ eindig dus X_1 is P-integreerbaar, en $(X_n - X_1)_{n=1}^{\infty}$ is $[0, \infty)$-waardig, dus we krijgen via het bovenstaande dat $E(\lim_n(X_n - X_1))$ eindig is, dat $E(\lim_n X_n - X_1|\mathscr{B})$ bestaat en gelijk is aan $\lim_n E(X_n - X_1|\mathscr{B})$. Maar dan

$$E(\lim_n X_n|\mathscr{B}) - E(X_1|\mathscr{B}) = \lim_n E(X_n|\mathscr{B}) - E(X_1|\mathscr{B})$$

  Omdat $E(X_1|\mathscr{B})$ a.s. eindig is, geldt a.s. de gelijkheid $E(\lim_n X_n|\mathscr{B}) = \lim E(X_n|\mathscr{B})$, dus volgt het gevraagde.

- - Een *filtratie* is een stijgende rij $(\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ van σ-algebras: $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \ldots$.
  - $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij $\mathbb{R}$-waardige stochasten heet *aangepast* aan de filtratie als $\forall n$, X_n $\mathscr{F}_n$-meetbaar is.
  - Een *stopping time* is een functie $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ zodat $\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n$. Equivalent, want $\tau \leq n-1 \in \mathscr{F}_{n-1}$, $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$.
- Als $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ een stochastisch proces is en $\{\mathscr{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ een filtratie, dan heet $(\{X_n\}_n, \{\mathscr{F}\}_n)$ een *martingaal* als:
  - $\{X_n\}_n$ is aangepast aan $\{\mathscr{F}_n\}_n$
  - $E(X_n)$ bestaat en is eindig voor elke n
  - $E(X_{n+1}|\,\mathscr{F}_{n+1}) = X_n$ a.s. voor alle $n \in \mathbb{N}_0$