8 STABILISATOREN, BANEN & TOEPASSINGEN.

Def G werkt op X, $x \in X$. Dan is de <u>stabilisator</u> van x in G:
$$G_x := \{ g \in G \mid g \circ x = x \} \subseteq G$$

Def H o.g. van G, $g \in G$, dan schrijft men $gHg^{-1} := \{ ghg^{-1} \in G \mid h \in H \}$

Opm Dit is weer een ondergroep, n.l. $e = geg^{-1} \in gHg^{-1} \Rightarrow (H0)$
en $a, b \in gHg^{-1} \Rightarrow g^{-1}ag,\ g^{-1}bg \in H \overset{(H1')}{\Rightarrow} g^{-1}ag(g^{-1}bg)^{-1} \in H$
$\Rightarrow g^{-1}ab^{-1}g \in H \Rightarrow ab^{-1} \in gHg^{-1}$ $\} \Rightarrow (H1')$

Opm op de ondergroepen $H \subset G$ is de relatie $\sim$ te definiëren door
$K \sim L \Leftrightarrow \exists g \in G: \ L = gKg^{-1}$
(Dit is een equivalentierelatie) Uit de definitie van de normaaldeler volgt dat L een normaaldeler is desda $L \sim K \Leftrightarrow L = K$

St 8.11 G werkt op X, $x \in X$. Dan is G_x ondergroep van G
en $\forall x \in X\ \forall g \in G: \quad G_{(g \circ x)} = g G_x g^{-1}$

<u>**Bew**</u> neem $x \in X$, $h, g \in G_x$ dan werkt op $e \circ x = x$ dus $e \in G_x \Rightarrow (H0)$
Ook $h \circ x = x$, $g \circ x = x$ dus $g^{-1} \circ x = g^{-1} \circ (g \circ x) = gg^{-1} \circ x =$
$e \circ x = x \Rightarrow g^{-1} \in G_x$ (H2) en $(hg) \circ x = h \circ (g \circ x) = h \circ x = x$
$\Rightarrow hg \in G_x$ (H1) $\Rightarrow G_x$ is o.g. van G
nu $h \in G$, $g \in G$, dan $h \in G_{(g \circ x)} \Leftrightarrow h \circ (g \circ x) = (g \circ x)$
$\Leftrightarrow hg \circ x = g \circ x \Leftrightarrow g^{-1} \circ (hg \circ x) = g^{-1} \circ (g \circ x) = g^{-1}g \circ x = x$
$\Leftrightarrow (g^{-1}hg) \circ x = x \Leftrightarrow g^{-1}hg \in G_x \Leftrightarrow \exists a \in G_x : g^{-1}hg = a$
$\Leftrightarrow \exists a \in G_x : \ h = gag^{-1} \Leftrightarrow h \in gG_xg^{-1}$
$\Rightarrow G_{g \circ x} = gG_xg^{-1}$ $\square$

— Voor X is een relatie $\sim$ te definiëren door:
$x, y \in X: \quad x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G: \ g \circ x = y$
Dit is een equivalentierelatie, want:
(1) $e \circ x = x$, $e \in G \Rightarrow x \sim x$, $\forall x \in X$
(2) $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow g \circ x = y$, $g' \circ y = z \Rightarrow g' \circ (g \circ x) = z$
$\Rightarrow (g'g) \circ x = z$, $g'g \in G \Rightarrow x \sim z$
(3) $x \sim y \Rightarrow g \circ x = y \Rightarrow g^{-1} \circ (g \circ x) = g^{-1} \circ y \Rightarrow x = g^{-1} \circ y$
$\Rightarrow y \sim x$

Def De klassen in X onder deze relatie $\sim$ heten de banen van X onder G. Aangegeven met representant $x \in X$:

$$Gx := \{ g \circ x \in X \mid g \in G \} \subseteq X$$

Def G werkt zgz. <u>transitief</u> op X als er precies één baan van X onder G is. (dus X)

Opm we zien dat $\{Gx \mid x \in X\}$ partitie is van X, dus $x, y \in X$: $Gx \cap Gy = \emptyset$ of $Gx = Gy$

St. 8.12 (Relatie Stabilisator – Baan) G werkt op X, $x \in X$ dan is $f: G/G_x \longrightarrow Gx$ door $f(aG_x) := a \circ x$ welgedefinieerd en bijectief. Bijgevolg: $\# Gx = [G : G_x]$

Bew $aG_x = bG_x \Leftrightarrow a^{-1}b \in G_x \Leftrightarrow (a^{-1}b) \circ x = x \Leftrightarrow$
$a^{-1} \circ (b \circ x) = x \Leftrightarrow a \circ (a^{-1} \circ (b \circ x)) = a \circ x \Leftrightarrow b \circ x = a \circ x$

Dus "$\Rightarrow$" geeft dat f welgedefinieerd is, "$\Leftarrow$" dat f injectief is.
De definitie van Gx is $Gx := \{ g \circ x \mid g \in G \}$
dus als $y \in Gx$, dan is $a \circ x = y$ voor zekere $a \in G$, neem dan $aG_x \in G/G_x$ dan zien we $f(aG_x) = a \circ x = y$ dus elke y wordt geraakt door $f \Rightarrow f$ is surjectief.

Gevolg 8.13 Laat G werken op X. Dan $\# X = \sum_{x \in S} [G : G_x]$

Waarbij S een verz is $S \subset X$ zdd voor elke baan Gx S precies één s bevat zdd $s \in Gx$ (een soort representantensysteem voor de partitie $\{ Gx \subseteq X \mid x \in X \}$)

Def voor de werking van G op G door conjugatie: $g \circ x := gxg^{-1}$
Is de stabilisator van een $x \in X = G$ zo belangrijk dat deze een eigen naam heeft, n.l. de centralisator $Z_G(x)$ ($\subseteq X = G$)

$$Z_G(a) = \{ g \in G \mid gag^{-1} = a \} = \{ g \in G \mid ga = ag \}$$

Z_G is een stabilisator, dus een o.g. van G. <u>Merk op</u>

$$Z_G(x) = G \Leftrightarrow x \in Z(G)$$

Def De banen van X onder G bij de werking $g \circ x := gxg^{-1}$, $G = X$, heten (speciaal) conjugatieklassen. Notatie
De onderliggende equivalentierelatie $\sim$ is: $C(s)$
$a \sim b \iff \exists g \in G : gag^{-1} = b$.

St 8.16 (Relatie conjugatieklassen en centralisatoren): $x \in G$, G eindige groep. Dan is het aantal elementen in de conjugatieklasse van x: $[G : Z_G(x)] = C(s)$
I.h.b. voor elke conjugatieklasse C van G geldt dat $\# C$ een deler van $\# G$ is

Ook: $\# G = \sum_{x \in S} [G : Z_G(x)]$ waarbij S een representanten-systeem is voor de partitie $\{ C(x) \subseteq G \mid x \in G \}$

Bew De fancy notatie is hier misleidend, natuurlijk. Een conjugatieklasse $C(x)$ is gewoon de baan van x onder de werking $g \circ x := gxg^{-1}$
en via 8.12 geldt $\# C(x) = \# Gx = [G : G_x]$
en $G_x = Z_G(x)$ in dit geval. Dus dit levert $\# C(x) = [G : Z_G(x)]$
en $[G : Z_G(x)]$ deelt $\# G$ vanwege $\# G = [G : Z_G(x)] \cdot \#(Z_G(x))$ (h.5
Verder $\# X = \sum_{x \in S} [G : G_x]$, gevolg 8.13, vervang nu X door G, want G werkt op G zelf dus $X = G$,
en vervang G_x door de fancy $Z_G(x)$. Dan volgt de klassenformule $\square$

BELANGRIJK GEVOLG

8.17 Zij G eindig, $\# G = p^n$, p priem, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ (zoiets heet een p-groep, want elk element is van orde p^k desda $\# G = p^n$ (via Cauchy)) En $G \neq \{e\}$
Dan $Z(G) \neq \{e\}$

Bew. Beschouw de werking van G op G door $g \circ x := gxg^{-1}$.
Voor elke $x \in G$: $[G : Z_G(x)]$ deelt $\# G = p^n$ (St. 8.16)
dus is 1 of een positieve macht van p. Als het 1 is, dan
$Z_G(x) = G \iff x \in Z(G)$

Dus stel dat $Z(G) = \{e\}$, dan alleen voor e geldt $[G : Z_G(e)] = 1$

Maar dan, omdat $\#G = \sum_{x \in S} [G : Z_G(x)]$

en neem k conjugatieklassen (waarvan één, zeg de k-de, $\{e\} = C(e)$ is) en elke conjugatieklasse i heeft grootte p^{l_i} met $l_i \geq 1$, geldt

$$\#G = \sum_{i=1}^{k-1} p^{l_i} + 1 \equiv 1 \mod p$$

Terwijl $\#G = p^n \equiv 0 \mod p$, contradictie.

Dus er is een $x \neq e$, $x \in G$, zdd $[G : Z_G(x)] = 1$, dus een $e \neq x$ zdd $Z_G(x) = G \Leftrightarrow x \in Z(G)$ dus $Z(G)$ is niet triviaal ! $\square$