7 ** TECHNIËK ** : HOMOMORFIE- & ISOMORFIESTELLINGEN

$N \lhd G_1$ nodig voor uitdelen, $N \subset \mathrm{Ker}(f)$ nodig voor welgedefinieerdheid

St 7.1 (Homomorfiestelling) $f: G_1 \to G_2$ homomorfisme en zij $N \lhd G_1$ met $N \subset \mathrm{Ker}(f)$. Zij $\varphi: G_1 \to G_1/N$ het kanonieke homom (6.8) door $\varphi(g_1) := g_1 N$, $g_1 \in G_1$

Dan is er een uniek $(\exists! \bar{f}: G_1/N \to G_2)$ $\bar{f}: G_1 \to G_2$ met $\bar{f}$ homomorfisme, zdd $f = \bar{f} \circ \varphi$

Bovendien $\mathrm{Ker}(\bar{f}) = \mathrm{Ker}(f)/N$ (deelverz. van G_1/N, zelfs een ondergroep want $\bar{f}$ is homomorfisme)

Bew <u>Uniciteit</u> stel $\bar{f}$ voldoet, dan moet dus gelden

$f(a) = (\bar{f} \circ \varphi)(a) \quad \forall a \in G$, dus

$f(a) = \bar{f}(aN) \quad \forall a \in G$ dus voor $aN \in G/N$ geldt $\bar{f}(aN) = f(a)$

als $\bar{f}'$ ook voldoet moet $\bar{f}'$ ook voldoen aan

$\forall aN \in G/N \; \bar{f}'(aN) = f(a)$, maar $f(a)$ is een gegeven en dus

ligt vast $\bar{f}'(aN) = \bar{f}(a) \quad \forall aN \in G/N$, en G/N

is precies het domein van beide functies, dus $\bar{f}' = \bar{f}$ en $\bar{f}$ is uniek.

<u>Existentie</u> definieer $\bar{f}: G_1/N \to G_2$ door $\bar{f}(aN) = f(a)$.

Maar is dit wel een goede definitie? dwz, als $aN = bN$, geldt dan wel $\bar{f}(aN) = \bar{f}(bN)$?

Ja, want $aN = bN \Rightarrow a^{-1}b \in N \subset \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(a^{-1}b) = e$

$\Rightarrow f(a)^{-1}f(b) = e \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow \bar{f}(bN) = f(b) = f(a) = \bar{f}(aN)$

Bovendien $\bar{f}(aN * bN) = f(abN) = f(ab) = f(a)f(b)$

$= \bar{f}(aN)\bar{f}(bN)$ dus $\bar{f}$ is homomorfisme.

Voor $\mathrm{Ker}(\bar{f})$ geldt $\bar{f}(aN) = e \Leftrightarrow f(a) = e$

$\Leftrightarrow a \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow aN \in \{ xN \mid x \in \mathrm{Ker}(f) \}$

$= \mathrm{Ker}(f)/N \Longrightarrow \mathrm{Ker}(\bar{f}) = \mathrm{Ker}(f)/N$ □

DIAGRAM

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & G_2 \\ G_1/N \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

mits $N \lhd G_1$

$f: G_1 \to G_2$ homom

$N \subseteq \mathrm{Ker}(f)$

St. 7.2 (Eerste Isomorfiestelling) $f : G_1 \to G_2$ homomorfisme. Dan $G_1 / \mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$ $(= f(G_1))$

Bew. pas 7.1 toe met $f : G_1 \to f(G_1)$ het homomorfisme en $N = \mathrm{Ker}(f)$. We zien dat $f : G_1 \to f(G_1)$ surjectief is per definitie van $f(G_1)$
Nu $N \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ want $N = \mathrm{Ker}(f)$, dus er is een <u>unieke</u> $\bar{f} : G_1 / \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ zdd $\bar{f}(a\,\mathrm{Ker}(f)) = f(a)$. Ihb zien we $\mathrm{Im}(\bar{f}) =$
$\{\bar{f}(a\,\mathrm{Ker}(f)) \in G_2 \mid a \in G_1\} = \{f(a) \in G_1 \mid a \in G_2\} = \mathrm{Im}(f)$
en $\mathrm{Ker}(\bar{f}) = \mathrm{Ker}(f) / \mathrm{Ker}(f) = \{\mathrm{Ker}(f)\}$, dus
$\bar{f}$ is injectief. $\bar{f}$ is dus bijectief homom. $\Rightarrow$ isomorfisme $\square$

DIAGRAM
$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & f(G_1) \ (\subseteq G_2) \\
 & G_1/\mathrm{Ker}(f) \arrow[u, dashed, "\sim"', "\exists!\ \bar{f} \text{ isomorfisme}"]
\end{tikzcd}$$

7.3 (Gevolg) als $f : G_1 \to G_2$ surjectief is (homom), dan
$G_1 / \mathrm{Ker}(f) \cong G_2$; door $a\,\mathrm{Ker} \overset{\sim}{\longmapsto} f(a)$ $\square$

Vb. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ door $r \mapsto e^{2\pi i r}$
$f(\mathbb{R}) = U_1$, de cirkelgroep. En $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{Z}$
want (Analyse) $e^{2\pi i r} = 1 \iff r \in \mathbb{Z}$.
dus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U_1$ via $\bar{f} : r + \mathbb{Z} \overset{\sim}{\longmapsto} e^{2\pi i r}$

G groep, $x \in G$, dan neem $f : \mathbb{Z} \to G$ met $f : m \mapsto x^m$
we zien, voor orde$(x) = n < \infty$, dat $\mathrm{Ker}(f) = \{m \in \mathbb{Z} \mid x^m = e\}$
$= \{m \in \mathbb{Z} \mid n \text{ deelt } m\} = n\mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong f(\mathbb{Z}) = \langle x \rangle$

Def voor G groep heet de abels gemaakte groep $G_{ab} := G/[G,G]$

Opm dit is de grootste quotiëntgroep van G die abels is.

Interessant gevolg

St. 7.5 G groep, A abelse groep. Dan is er voor elke $f: G \to A$ een unieke $\bar{f} : G_{ab} \to A$ zdd $f = \bar{f} \circ \varphi$, met $\varphi : G \to G_{ab}$ door $g \longmapsto g[G,G]$ de kanonieke afb. op G_{ab}.

Bew Als we kunnen laten zien $[G,G] \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, kunnen we 7.1 toepassen met $N = [G,G]$ en homom. f en zijn we klaar.
Stel $x, y \in G$, dan commuteren $f(x)$ en $f(y)$, want die liggen $\in A$.
Dus $f(x)f(y) = f(y)f(x) \Rightarrow f(y)f(x)f(y)^{-1}f(x)^{-1} = e$
$\Rightarrow f(yxy^{-1}x^{-1}) = e \Rightarrow [y,x] \in \mathrm{Ker}(f)$ voor alle $x, y \in G$.
Maar $\mathrm{Ker}(f)$ is o.g. van G, dus wegens (H1) en (H2) ligt heel de ondergroep voortgebracht door alle commutatoren $[x,y]$ in $\mathrm{Ker}(f)$ en dat is $[G,G]$. Dus $[G,G] \subseteq \mathrm{Ker}$, wat het bewijs afmaakt □

DIAGRAM

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A \\ & G_{ab} \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{f} : G_{ab} \to A"'] & \end{tikzcd}$$

Andere manier: $G/\mathrm{Ker}(f) \cong f(G)$ en $f(G)$ is o.g. van A dus zelf abels. isomorfe groepen zijn beide abels of beide niet abels, dus $G/\mathrm{Ker}(f)$ is abels, wat via (6.14) geeft dat $[G,G] \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

St 7.6 $N \triangleleft G$, $H \subset G$ o.g. Dan met $HN := \{ nh \in G \mid n \in N, h \in H \}$ Geldt:

(a) $H \cap N \triangleleft H$

(b) HN is o.g. van G

(c) $H/(H \cap N) \cong (HN)/N$ (Tweede Isomorfiestelling)

Bew (a) $H \cap N$ is doorsnede van twee o.g. dus zelf een o.g., van G en dus ook van H want de bewerking op H is dezelfde als die op G op de beperking $|_H$ na, die er hier niet toe doet.
verder zij $n \in H \cap N$, $h \in H$, dan (H2 op H) $\Rightarrow h^{-1} \in H$,
dus $n \in H \cap N \subseteq H \Rightarrow hnh^{-1} \in H$ via 2x (H1 op H)
en ook $n \in H \cap N \subseteq N$, $h \in H \subseteq G$, dus $h \in G$, $n \in N \Rightarrow hnh^{-1} \in N$
dus $hnh^{-1} \in H$, $hnh^{-1} \in N \Rightarrow hnh^{-1} \in H \cap N$ dus $H \cap N \triangleleft H$
$\forall h \in H\ \forall n \in N$

(a) Alternatief $\varphi: G \to G/N$ de canonieke afb $g \longmapsto gN$ op G en zij ψ de beperking van φ tot H, dus $\psi: H \to G/N$ met $\psi(a) = \varphi(a)$, $\forall a \in H$.

Dan $Ker(\psi) = \{x \in H \mid x \in Ker(\varphi)\} = H \cap Ker(\varphi) = H \cap N$ en $Ker(\psi)$ is normaaldeler van H, dus $H \cap N$ ook

(b) $\psi(H)$ is o.g. van G/N, en dit is $\varphi(H)$

en $\varphi(H) = \{yN \in G/N \mid \exists x \in H : \varphi(x) = yN\} = \{\varphi(x) \in G/N \mid x \in G\}$ en voor $x \in G$:

$\varphi(x) \in \varphi(H) \Leftrightarrow \exists h \in H : \varphi(x) = \varphi(h) \Leftrightarrow \exists h \in H \ \varphi(xh^{-1}) = e$

$\Leftrightarrow \exists h \in H : xh^{-1} \in Ker(\varphi) = N \Leftrightarrow \exists h \in H ; x \in Nh = hN$

$\Leftrightarrow \exists h \in H, n \in N : x = hn \Longrightarrow x \in HN$

dus $HN = \{x \in G \mid \varphi(x) \in \varphi(H)\}$

we zien $e \in H$, $e \in N$ dus $e \in HN \Rightarrow$ (HO), en

$x, y \in HN$, dan $\varphi(x) \in \varphi(H)$, $\varphi(y) \in \varphi(H)$, dus

omdat $\varphi(H)$ og van G/N is, geldt $\varphi(x)\varphi(y)^{-1} \in \varphi(H)$ (H1')

dus $\varphi(xy^{-1}) \in \varphi(H)$ dus $xy^{-1} \in HN \Rightarrow HN$ is o.g van G.

(c) met $\chi: HN \to G/N$

de beperking van φ tot HN, dus $\chi(a) = \varphi(a) = aN$, $a \in HN$.

Dan $x \in Ker(\chi) \Leftrightarrow x \in HN \wedge x \in Ker(\varphi)$ maar $Ker(\varphi) = N$

en $N = eN \subseteq HN$ want $e \in H$ (HO). dus $Ker(\varphi) \subseteq HN$ dus

$x \in Ker(\chi) \Leftrightarrow x \in Ker(\varphi) = N \Rightarrow Ker(\chi) = N$

Bovendien $\chi(HN) = \{\chi(x) \in G/N \mid x \in HN\} =$

$\{\varphi(x) \in G/N \mid x \in \{y \in G \mid \varphi(y) \in \varphi(H)\}\} = \{\varphi(x) \in G/N \mid x \in G\}$
$= \varphi(H)$

Dus pas de 1e isomorfiestelling geeft nu, met homom

$\chi: HN \to G/N$, omdat $N = Ker(\chi)$

dat $(HN)/N \underset{\chi}{\cong} \chi(HN) = \varphi(H)$ (1)

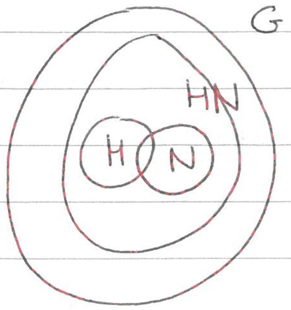
Pas ook de 1e isomorfiestelling toe met $\psi = \varphi|_H$, dus $\varphi: H \to G/N$

dan zagen we $Ker(\psi) = H \cap N$, $\psi(H) = \varphi(H)$, dus

$H/(H \cap N) \cong \psi(H) = \varphi(H)$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ $H/(H \cap N) \cong (HN)/N$ $\square$

DIAGRAM



$$HN/N \cong H/(H\cap N)$$

$\varphi : G \to G/N : g \mapsto gN$

$\psi : H \to G/N : h \mapsto hN$

$\chi : HN \to G/N : hn \mapsto hnN = hN$

$\mathrm{Ker}(\varphi) = N$	$\mathrm{Im}(\varphi) = G/N$
$\mathrm{Ker}(\psi) = H\cap N$	$\mathrm{Im}(\psi) = \varphi(H)$
$\mathrm{Ker}(\chi) = (HN)\cap N = N$	$\mathrm{Im}(\chi) = \varphi(H)$

(1)
$$\begin{tikzcd} HN \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & \varphi(H) \subseteq G/N \\ (HN)/N \arrow[ur, dashed, "\sim"] & \end{tikzcd}$$

$\exists!\ \bar{\chi} : HN/N \xrightarrow{\sim} \varphi(H)$ door $hnN \mapsto \varphi(hn) = \chi(hn)$

(2)
$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \varphi(H) \subseteq G/N \\ H/(H\cap N) \arrow[ur, dashed, "\sim"] & \end{tikzcd}$$

$\exists!\ \bar{\psi} : H/(H\cap N) \xrightarrow{\sim} \varphi(H)$ door $h(H\cap N) \mapsto \varphi(h) = \psi(h)$

samen:
$$\begin{tikzcd} & \varphi(H) \arrow[dl, dashed, "\bar{\chi}"'] \arrow[dr, dashed, "\bar{\psi}"] & \\ H/(H\cap N) \arrow[ur, dashed, "\sim"] \arrow[rr, bend right, dashed, "\sim"] & & (HN)/N \arrow[ul, dashed, "\sim"'] \arrow[ll, bend left, dashed] \end{tikzcd}$$

$\bar{\chi}\circ\bar{\psi}^{-1}$ of $\bar{\psi}\circ\bar{\chi}^{-1}$

St.78 (Derde Isomorfiestelling) G groep, $N \trianglelefteq G$, $N' \supseteq N$ met $N' \trianglelefteq G$. Dan

(a) N'/N (is gerechtvaardigd want $N' \trianglerighteq N$) is normaaldeler van G/N, omgekeerd is elke normaaldeler $X \trianglelefteq G/N$ van de vorm $X = N'/N$ met $N' \trianglelefteq G$, $N' \supseteq N$

(b) $(G/N)/(N'/N) \cong G/N'$

Bew (a) : <u>N/N' is normaaldeler</u> : uit 6.13 volgde al dat voor $N \trianglelefteq G$ en $H \subseteq G$ ondergroep geldt $N \trianglelefteq H$ en H/N is o.g. van G.
We hoeven dus alleen te bewijzen dat als $n'N \in N'/N$, $gN \in G/N$, dat $gN \cdot n'N \cdot (gN)^{-1} \in N'/N$:
neem $n' \in N'$, $g \in G$, dan $(gN)^{-1} = g^{-1}N$
en dus $gN \cdot n'N \cdot (gN)^{-1} = gn'g^{-1}N$
maar $N' \trianglelefteq G$, dus $\forall g \in G \ \forall n' \in N' :\ gn'g^{-1} \in N'$
dus $gn'g^{-1}N = n''N'$ voor $n'' \in N'$ dus ihb $gn'g^{-1}N \in N'/N$

<u>andersom, stel $X \trianglelefteq G/N$</u>, dan volgde reeds dat X een o.g. van G/N is, dus X is van de vorm H/N met H o.g. van G en $N \subseteq H$ (6.13)
schrijf dus $X = H/N$, H og. G zdd $N \subseteq H$, dan zien we voor $\forall h \in H$, dat $\forall g \in G$: $gN \cdot hN \cdot g^{-1}N \in H/N$
dus $ghg^{-1}N \in H/N$, dus $ghg^{-1}N = h'N$ voor zekere $\exists h' \in H$
dus $(h')^{-1}ghg^{-1} \in N$ $\forall h \in H \ \forall g \in G \ \exists h' \in H$, dus omdat $N \subseteq H$
geldt $\forall h \in H : \forall g \in H : \exists h' \in H$ $ghg^{-1} \in h'H = H$
dus H is een normaaldeler van G, en dus kan X worden geschreven als $X = H/N$ met $H \supseteq N$, $H \trianglelefteq G$. $\square$

(b) <u>$(G/N)/(N'/N) \cong G/N'$</u> : Zij $f : G \to G/N'$ en $\varphi : G \to G/N$ de canonieke afb. $f : x \mapsto xN'$, $\varphi : x \mapsto xN$

$\mathrm{Ker}(f) = N'$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = N$, dus $N \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ en pas dus 7.1 toe met homom f en canoniek homom φ
Dan geeft dit: $\exists! \ \bar{f} : G/N \to G/N'$ met $\bar{f} : aN \mapsto aN'$
en omdat $\mathrm{Im}(f) = G/N'$ geldt dat $\bar{f}$ surjectief is
want $f = \varphi \circ \bar{f}$ dus $\mathrm{Im}(\bar{f}) = \{ xN' \in G/N' \mid xN \in G/N \}$
$= \{ f(x) \in G/N' \mid xN \in G/N \} = \{ f(x) \in G/N' \mid x \in G \} = \mathrm{Im}(f)$
Dus $\bar{f}$ is een surjectief homomorfisme, met
$\mathrm{Ker}(\bar{f}) = \mathrm{Ker}(f)/N = N'/N$ (per 7.1)
Dus pas nu 7.2 toe met homom $\bar{f}$, dan zien we
$(G/N)/(N'/N) \cong \mathrm{Im}(\bar{f}) = G/N'$

DIAGRAM :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f \text{ suj (canoniek)}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & G/N' \\
(\text{canoniek}) & G/N \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

$\exists!\ \bar{f} : G/N \to G/N'$ suj

$\mathrm{Ker}(\bar{f}) = N'/N$

$$\begin{tikzcd}
G/N \arrow[rr, dashed, "\bar{f} \text{ surjectief}"] \arrow[dr] & & \mathrm{Im}(\bar{f}) = G/N' \\
& (G/N)/\mathrm{Ker}(\bar{f}) = (G/N)/(N'/N) \arrow[ur, dashed, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

$\exists!\ \bar{\bar{f}} : (G/N)/\mathrm{Ker}(\bar{f}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\bar{f})$

het is een soort ruit :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "\varphi"] \arrow[drr, "f"] & & \\
G/N \arrow[rr, dashed, "\bar{f}"'] \arrow[dr] & & G/N' \\
& (G/N)/(N'/N) \arrow[ur, dashed, "\sim", "\bar{\bar{f}}"'] &
\end{tikzcd}$$