6

Def een o.g. $N \subseteq G$ (g.) heet een normaaldeler of normale o.g. als geldt $\forall n \in N \forall g \in G: gng^{-1} \in N$

Notatie $N \trianglelefteq G$

Vb als G abels is, is elke o.g. $H \leq G$ een normaaldeler.
want $h \in H, g \in G \Rightarrow ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H$

$\{e\}$ en G zijn de triviale normaaldelers van elke G.

$V_4 := \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
is normaaldeler van S_4, want

Opm A_n is normaaldeler van S_n voor $n \geq 1$, immers
$\sigma \in S_n, \tau \in A_n \Rightarrow \varepsilon(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)^{-1}$
en $\{\pm 1\}$ is abels $\Rightarrow = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma)^{-1}\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau) = 1$
dus ook $\sigma\tau\sigma^{-1}$ is even en dus in A_n.

merk nu op dat $\{\sigma \in A_n \mid \text{orde}(\sigma) = 2\} = V_4$
en voor $\tau \in V_4, \sigma \in S_n$ geldt $\text{orde}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \text{orde}(\tau)$
immers $(xyx^{-1})^n = e \Leftrightarrow xy^nx^{-1} = e \Leftrightarrow y^n = x^{-1}ex = e$
dus $\text{orde}(xyx^{-1}) = \text{orde}(y)$ voor alle $x, y \in G$, G willekeurige groep.
Dus $\sigma \in S_4, \tau \in V_4 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\varepsilon(\tau)=1 \\ \text{orde}(\tau) = 2\end{matrix}\right. \Rightarrow \left.\begin{matrix}\varepsilon(\sigma\tau\sigma^{-1}) = 1 \\ \text{orde}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = 2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1} \in V_4$

! Vb G groep, dan definieert men het <u>centrum</u> $Z(G)$ als
Def $Z(G) := \{x \in G \mid \forall g \in G: xa = ax\}$
(de x'en in G die met alle elementen van G commuteren)
ook zie je: H og G, $H \subseteq$ ∈, dan H normaal, want $xhx^{-1} = h \in H$
Men gaat na $x \in Z(G), g \in G \Rightarrow gxg^{-1} = gg^{-1}x = x \in Z(G)$

Opm G abels $\Rightarrow Z(G) = G$

!Vb G groep, dan voor $g, h \in G$: $[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$, de
Def commutator van g en h. Toelichting: $gh = [g,h]hg$

Def commutatorondergroep $[G,G] := \langle \{[g,h], [g,h]^{-1} \mid g,h \in G\} \rangle$
is een normaaldeler. Opm niet elke $x \in [G,G]$ is nog een commutator $[g,h]$

ook ga je na: als H og G, $[G,G] \subseteq H$, dan is H normaal: $xhx^{-1} = [x,h]h \in H$

en $[g,h]^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})^{-1} = hgh^{-1}g^{-1} = [h,g]$, dus
$[G,G] = \langle \{[g,h] \mid g,h \in G\} \rangle$
en als $x \in [G,G]$ dan $x = [g_1,g_2][g_2,g_3] \cdots [g_{n-1},g_n]$, $n \in 2\mathbb{Z}_{>0}$
dus $g \in G$, dan $gxg^{-1} = gxg^{-1}x^{-1}x = [g,x]x$
en $x \in [G,G]$, $[g,x] \in [G,G]$, dus $gxg^{-1} \in [G,G]$ wegens (H1).

nog sterker: $H \leq G$ o.g., $[G,G] \subseteq H \Rightarrow x \in H$ $g \in G$ dan
$gxg^{-1} = [g,x]x$ en $x \in H$, $[g,x] \in [G,G] \subseteq H$ dus $gxg^{-1} \in H$.
Dus elke $H \subset G$ met $[G,G] \subseteq H$ is normaaldeler.

St. 6.3 N normaaldeler van G $\Leftrightarrow$ $\forall g \in G$: $gN = Ng$

St. 6.4 zij N og. van G, $[G:N] = 2$. Dan $N \triangleleft G$

! ZIE OOK 8.8 : VOOR $[G:N] = p$, p kleinste priemdeler $\#G$

Bew zij $g \in G$, $h \in N$. als $g \in N$, dan $ghg^{-1} \in N$ via (H1).
dus stel $g \notin N$, dus $g \in G \setminus N$. Dan ook $g^{-1} \notin N$, anders
zou via (H2) $(g^{-1})^{-1} \in N$ en dus $g \in N$, contradictie.
Dus $g^{-1}N \neq N$, en N heeft index 2 dus $G = N \sqcup g^{-1}N$ $\Rightarrow G \setminus N = g^{-1}N$
$hg^{-1} \notin N$ anders zou $hN = g^{-1}N$, dus $N = g^{-1}N$ ($h \in N \Rightarrow hN = N$)
dus $hg^{-1} \in g^{-1}N$ dus $(g^{-1})^{-1}hg^{-1} \in N$ via st. 5.18a
en dus $ghg^{-1} \in N$ ■

Alternatief: G/N bestaat uit slechts twee nevenklassen waarvan
een N zelf is, evenzo $N \backslash G$. De andere nevenklasse is dus
in beide gevallen $G \setminus N$, dus we zien dat voor $g \notin N$
geldt $G/N = \{N, gN\}$, $N \backslash G = \{N, Ng\}$ met
$N = N$ en $gN = G \setminus N = Ng$, noodzakelijk dus $gN = Ng$.
via 6.4 "$\Leftarrow$" volgt nu dat N normaaldeler van G is ■

Vb $\{r^m \mid 1 \leq m \leq n\}$ heeft n elementen, $\#D_n = 2n \Rightarrow$
rotatieondergroep is normaaldeler.

St. 6.6 $f: G_1 \to G_2$ homom. $\Longrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) \triangleleft G$
De omkering blijkt (6.12) ook waar te zijn: elke
normaaldeler is de kern van een homom.

Bew stel $g \in Ker(f), x \in G \Rightarrow f(g) = e$, dus $f(xgx^{-1}) = f(x)f(g)f(x)^{-1}$
$= f(x)f(x)^{-1} = e \Rightarrow xgx^{-1} \in Ker(f)$ □

Vb $A_n = Ker(\varepsilon)$, tevens $[S_n ; A_n] = 2$

Vb $SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid det(A) = 1 \}$

voor $det : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ een homom. want $det(AB) = (det A)(det B)$

dus $SL_n(\mathbb{R}) = Ker(det)$

(c) voor $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}^*$ "de groep der quaternionen", geldt $Z(Q) = \{\pm 1\}$

6.8 (Constructie Factorgroep) G groep, $N \trianglelefteq G$, dan kan men op G/N een bewerking $*$ definiëren die van G/N een groep maakt: de "factorgroep" (def.)

definiëer $* : G/N \times G/N \longrightarrow G/N$ door $aN * bN := (ab)N$ waarbij ab de bewerking van (a,b) in $G \times G$ voorstelt.

Dit is welgedefinieerd: als $a_1N = a_2N$, $b_1N = b_2N$, dan $a_1N * b_1N := (a_1b_1)N$, en $a_1 = a_2h$, $b_1 = b_2h'$ voor $h, h' \in N$

dus $a_1b_1 = a_2hb_2h' = a_2b_2b_2^{-1}hb_2h'$ en $h \in N$, dus $b_2^{-1}hb_2 = (b_2^{-1})h(b_2^{-1})^{-1}$ voor zekere $b_2^{-1} \in G$ en wegens N normaal ligt dit in N, dus neem $b_2^{-1}hb_2 = h'' \in N$, dan $a_1b_1 = a_2b_2h''h'$ en $h''h' \in N$ wegens (H1), dus $a_1b_1 \in a_2b_2N \Rightarrow a_1b_1N = a_2b_2N$.

Verder moeten we (G1)(G2)(G3) op G/N nagaan:

$(aN * bN) * cN = (ab)N * cN = (ab)cN \underset{(G1 \text{ op } G)}{=} a(bc)N = aN * (bN * cN) \Rightarrow$ G1

neem $eN \in G/N$, dan zien we $\forall a \in G$: $eN * aN = eaN = aN$
$aN * eN = aeN = aN$

dus $eN (= N)$ is eenheid $\Rightarrow$ (G2)

$aN \in G/N$, dan $a \in G$ dus $a^{-1} \in G$, dus $a^{-1}N \in G/N$

en $a^{-1}N * aN = a^{-1}aN = eN = N$ (G3) □

Merk op orde: $\# G/N = [G:N]$ per definitie!

Def voor $N \triangleleft G$ definiëren we de factorgroep en
het kanonieke (natuurlijke) homomorfisme $\varphi : G \to G/N$
door $a \mapsto aN$

Dit is een homom. want $\varphi(ab) = abN = aN * bN = \varphi(a) * \varphi(b)$

Opm Ook $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \mid aN = N\} = \{a \in G \mid e^{-1}a \in N\} = \{g \in G \mid g \in N\} = N$

6.12 — Dus N is de kern van een homomorfisme $G \to G/N$ (n.l. φ)

— Bovendien is φ surjectief, want per definitie $G/N = \{gN \mid g \in G\}$
$= \{\varphi(g) \mid g \in G\}$.

Om preciezer te zijn kiest men vaak eerst een representantensysteem $S \subset G$
(een verzameling
die uit elke nevenklasse precies één element bevat)
Dan is $\{sN \mid s \in S\}$ het beeld van de bijectie $s \mapsto sN$
van $S \to (G/N)$.

TECHNISCHE STELLINGEN V FACTORGROEPEN

St. 6.13 $N \trianglelefteq G$, G groep, $H < G$ ondergroep met $N < H$
Dan is H/N een ondergroep van G/N

Omgekeerd: elke o.g. van G/N is van de vorm H/N met $H < G$ og en $N < H$.

Bew H/N is hier een gerechtvaardigde factorgroep, want H is zelf een groep en N dus een ondergroep van H en $h \in H$, $n \in N \Rightarrow h \in G$, $n \in N$ dus $hnh^{-1} \in N$, dus N is ook altijd een normaaldeler van H.
Omdat H een groep is onder de groepswet $\circ|_H$ is H/N een groep onder de eerder gedefinieerde bewerking en omdat $L \in H/N \Rightarrow \exists a \in H : L = aN$ en $H < G$ geldt $\exists a \in G : L = aN \Rightarrow L \in G/N$, dus $H/N \subset G/N$, maar wegens het feit dat H/N een groep is, dus (G3) geldt en H/N gesloten onder verm. geldt (H1), (H2), en omdat $e \in H$ geldt $eN \in G/N$ dus (H0). H/N is dus o.g. van G/N.

Omkering: zij $X < G/N$ ondergroep. Definieer $H := \{a \in G \mid aN \in X\}$ dan zien we $a, b \in X \Rightarrow aN, bN \in X \Rightarrow aN \in X$, $b^{-1}N \in X \Rightarrow ab^{-1}N \in X$ $\Rightarrow ab^{-1} \in H$ (H1')
en $N \in G/N$ dus $e \in X$ (H0)
Dus H is o.g. van N en $H/N = \{aN \mid a \in H\} = \{aN \mid aN \in X\} = X$ dus $X = H/N$ voor o.g. H. Zie ook dat als $x \in N$, dan $aN = N \in X$ want X is og dus bevat eenheid N (op G/N) dus $x \in G$ en $xN \in X$ dus $x \in H \Rightarrow N < H$ ■

St. 6.14 G groep, $N \trianglelefteq G$, dan G/N abels $\Leftrightarrow [G,G] \subseteq N$

Bew "$\Rightarrow$" stel G/N abels, dan $abN = baN$ $\forall a,b \in G$
dus $a^{-1}b^{-1}ab \in N$ $\forall a,b \in N$ en dit is $[a^{-1}, b^{-1}]$,
dus ook $a^{-1}, b^{-1} \in N$ wegens (H2) en dus $\forall a,b \in N : [a,b] \in N$
en dus ook wegens (H2) $[a,b]^{-1} \in N$. Dus moet ook heel de verzameling voortgebracht door commutatoren in N liggen door herhaald toepassen van (H1) en/of (H2) $\Rightarrow [G,G] \subseteq N$

"$\Leftarrow$" stel $[G,G] \subset N$, dan geldt voor $a,b \in G$ dat $a^{-1}, b^{-1} \in N$, dus $[a^{-1}, b^{-1}] \in N$, dus $a^{-1}b^{-1}ab \in N$

dus $baN = abN$ $\blacksquare$

St. 6.15 $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$:

(a) $[S_n, S_n] = A_n$

(b) $[A_n, A_n] = \{(1)\}$ voor $n = 1,2,3$

$[A_4, A_4] = V_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$[A_n, A_n] = A_n$ voor $n \geq 5$

Bew (a) Algemeen: $\# S_n/A_n \overset{n\geq 1}{=} 2$, en een groep met 2 elementen (2 is priem) is cyclisch dus abels.

Dus (6.14 "$\Rightarrow$") $[S_n, S_n] \subseteq A_n$.

Merk ook op, voor $n \leq 2$, dat

$S_1 = \{(1)\} \Rightarrow A_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \{(1)\} \Rightarrow S_1/A_1 = \{(1)A_n\} = \{A_n\}$

$[S_1, S_1] = \{(1)(1)(1)(1)\} = \{(1)\} = A_1$

$S_2 = \{(1), (12)\} \Rightarrow A_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \{(1)\}$

$[S_2, S_2] = \{(1)(12)(1)(12) \ldots \text{etc}\}$ maar (1) doet niets en $(12) = (12)^{-1}$

dus $[S_2, S_2] = \{(1)\} = A_2$

voor $n \geq 3$ neem 3 verschillende $i,j,k \in [n]$, dat kan nu.

Dan $[(ij), (ik)] = (ij)(ik)(ij)(ik) = (ijk)$

dus elke drietallen $(i,j,k) \in [n]^3$ hebben een 3-cykel in $[S_n, S_n]$

maar $A_n = \langle \text{3-cykels} \rangle$ (4.13) dus $A_n \subseteq [S_n, S_n]$.

samen met $[S_n, S_n] \subseteq A_n$ geeft dit $A_n = [S_n, S_n]$

(b) $n=1$, $n=2$ gaf $A_n = \{(1)\} \Rightarrow [A_n, A_n] = \langle [i,j] \mid i=j=(1) \rangle = \{(1)\}$

dus $[A_n, A_n] = A_n$.

$n=3$ geeft $\# A_n = \frac{3!}{2} = 3 \overset{\text{priem}}{\Rightarrow} A_n$ is cyclisch dus abels

dus elke commutator in A_n is $ghg^{-1}h^{-1} = gg^{-1}hh^{-1} = (1)$

dus $[A_n, A_n] = \{(1)\} \Rightarrow n = 1,2,3$ $[A_n, A_n] = \{(1)\}$

voor $n=4$: V_4 was $V_4 \triangleleft S_4$, dus ook $V_4 \triangleleft A_4 (\subset S_4)$

en A_4/V_4 is abels want $\# A_4/V_4 = \frac{\# A_4}{\# V_4} = \frac{\frac{4!}{2}}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8} = 3$ priem

dus $[A_4, A_4] \subset V_4$. Verder zien we voor $i,j,k,l \in [4]$ verschillend dat $(i,j)(k,l) = [(ijk), (ijl)]$ aan dit rekenwerk ontkom je niet. dus $V_4 \subset [A_4, A_4]$

dus "$\supset$", "$\subset$" $\Rightarrow$ $V_4 = [A_4, A_4]$

$n \geq 5$ tenslotte: dan zien we: voor $i, j, k, l, m \in [n]$, alle vijf nu verschillend, dat

$$[(i\,j\,k),(i\,l\,m)] = (i\,j\,k)(i\,l\,m)(i\,j\,k)^{-1}(i\,l\,m)^{-1} =$$

$$(i\,j\,k)(i\,l\,m)(i\,j\,k)^{2}(i\,l\,m)^{2} = (i\,j\,k)(i\,l\,m)(i\,k\,j)(i\,m\,l)$$

3-cykels: orde 3

$= (i\,j\,l)$ dus elke 3-cykel kan als commutator worden geschreven, dus $\{3\text{-cykels}\} \subset [A_n, A_n]$, maar dan ook $\langle 3\text{-cykels} \rangle \subset [A_n, A_n]$ dus $A_n \subseteq [A_n, A_n]$. Per definitie $[A_n, A_n] \subseteq A_n$, dus $A_n = [A_n, A_n]$ $\square$