3 KARAKTERISERING VAN VRIJE GROEPEN MET GRAAFWERKING EN NIELSEN-SCHREIER

def Voor een graaf Γ en quot.graaf $\overline{\Gamma} = G\backslash\Gamma$ met natuurlijke projectie $p: \Gamma \to \overline{\Gamma}$ die $e \mapsto G(e)$ $v \mapsto G(v)$ afbeeldt, is een lift van een deelgraaf $\overline{\Lambda} \leq \overline{\Gamma}$ een graaf $\Lambda \leq \Gamma$ zodat $p|_\Lambda : \Lambda \to \overline{\Lambda}$ een graafisomorfisme is

Λ is dus een deelgraaf van Γ die $\overline{\Lambda}$ "representeert"

St. 3.13 Zij G vrij werkend op Γ, $\overline{\Gamma} = G\backslash\Gamma$. Dan is er voor elke deelboom $\overline{T} \leq \overline{\Gamma}$ een deelboom $T \leq \Gamma$ die een lift is voor $\overline{T}$.

Bew Zij Υ de verzameling deelbomen T van Γ die $p(T) \leq \overline{T}$ hebben en dat $p|_T$ injectief is. Dan is Υ partieel geordend met inclusie en elke keten $\{T_k\}_{k\in I}$ heeft een bovengrens $\bigcup_{k\in I} T_k$ die zelf in Υ ligt. $\Longrightarrow$ Zorns lemma geeft dat Υ een max element T_0 heeft.

[ga na, analoog aan st. over maximale bomen]

Nu moeten we alleen nog laten zien dat $p|_{T_0} : T_0 \to \overline{T}$ ook surjectief is. Hiervoor gebruiken we natuurlijk dat de werking van G vrij is.

Neem dus $p(T_0) \subsetneq \overline{T}$. Dan is er een lijn e' in $\overline{T}$ die niet wordt geraakt. Dan ligt ook één van de eindpunten v, w van e' niet in $p(T_0)$, anders zouden v, w verbonden zijn in $p(T_0)$ én nogmaals verbonden in $\overline{T}$ door e', zodat $\overline{T}$ een cykel bevat en niet een boom is.

Zij e een lift van e', dus een lijn in Γ met $p(e) = e'$

omdat G zonder inversie op de lijnen werkt kunnen we een oriëntatie aannemen, zvva zodat $\alpha(e) \in T_0$ en dan hebben we $\omega(e) \notin T_0$ want anders ligt $\omega(e') = p(\omega(e)) \in p(T_0) \subseteq \overline{T}$ en we hadden juist aangenomen $\omega(e) \notin \overline{T}$, anders kregen we een cykel.

$\Rightarrow$ breid T_0 uit tot graaf T_1 die naast $V(T_0)$ ook $\omega(e)$ bevat en naast $E(T_0)$ ook e bevat. Dan is T_1 samenhangend omdat T_0 dat is en ω eraan zit met e. En T_1 bevat geen cykels, want $\omega(e) \in T_0$ en $\omega(e)$ heeft graad 1.
en $p(T_1)$ is nog steeds deelboom van $\overline{T}$ want
$p(e) = e' \in E(\overline{T})$
$p(\omega(e)) = \omega(e') \in V(\overline{T})$
En $p|_{T_1}$ is nog steeds injectief want $e \notin E(T_0)$ en
$e' \notin p(T_0)$, en $\omega(e) \notin V(T_0)$ en $\omega(e') \notin p(T_0)$

$\Rightarrow$ $T_1 \in \Upsilon$ maar $T_0 < T_1$ tegenspraak met maximaliteit $\Longrightarrow p(T_0) = \overline{T}$ $\square$

3.14 Karakterisering van vrije groepen met vrije werking op bomen.

Zij Γ boom waarop G vrij werkt.

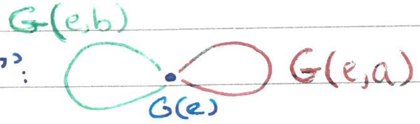
Voor $T \leq \Gamma$ een lift van de opspannende boom T' van $\Gamma' = G \backslash \Gamma$ met een aangenomen oriëntatie op Γ (bewaard door G) en overgeërfd door Γ' via natuurlijke projectie $p : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$.

Zij $S = \{ g \in G \mid g \neq e_G, \exists e \in \Gamma \ \alpha(e) \in T, \omega(e) \in gT \}$

Dan is S een basis voor G en G een vrije groep
i.h.b. als Γ' eindig is dan is G vrij van rang $r = \# E(\Gamma') - \# V(\Gamma') + 1$.

Vbd $F_2 = F(a,b)$ werkt vrij op zijn eigen Cayley-graaf middels linksvermenigvuldiging $g \cdot w = gw$ voor $g, w \in F_2$.

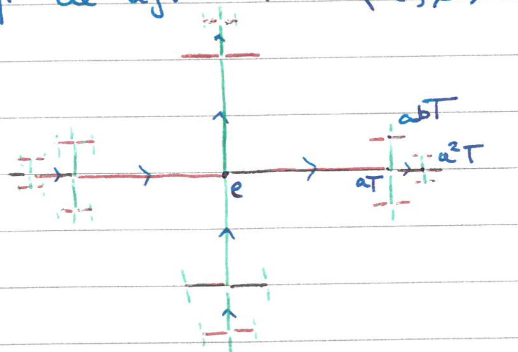
de quotiëntgraaf $F_2 \backslash \Gamma(F_2, \{a,b\})$ is te bepalen:
g zit in dezelfde baan als e_F, middels $g \cdot e_G = g$.
Dus F_2 werkt transitief op de knopen.
Echter, (g, ga) en (g, gb) zitten in andere banen want F_2 werkt vrij dus alleen e_G beeldt g op g af maar deze kan ga niet op gb afbeelden
Echter elke (g, ga) zit in de baan van (e, a) en elke (g, gb) in die van (e, b).

Quotiëntgraaf Γ': 

, met $T' = (G(e), \emptyset)$ opspannende boom.

Deze heeft de lift $T = (e, \emptyset)$ in Γ:

dit plaatje is het juiste idee.



en we zien $S = \{ g \in G \setminus \{e_G\} \mid \exists e\ \alpha(e) \in T,\ \omega(e) \in gT \}$
$= \{a, b\}$ als we de juiste oriëntaties kiezen,
en anders wordt dit eventueel $\{a, b^{-1}\}$, $\{a^{-1}, b^{-1}\}$ of $\{a^{-1}, b\}$.

Bewijs van 3.14 :

we hebben een boom $T' \subseteq T''$ met lift $T \subseteq T'$
een oriëntatie op T die in T'' bewaard blijft
op de "equivalentieklasse – lijnen/knopen"

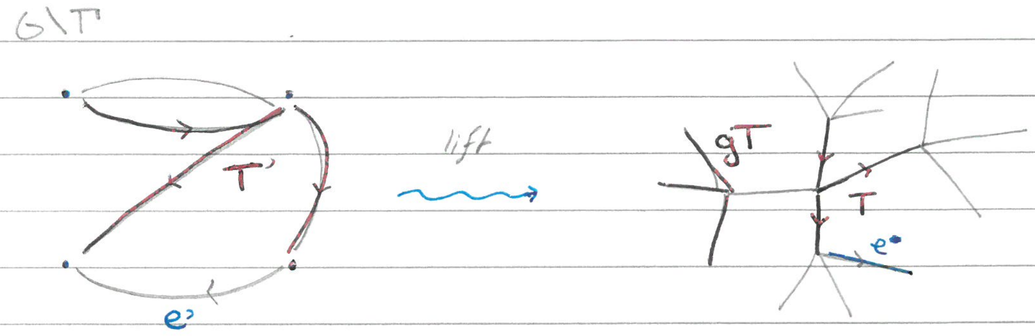
omdat T' opspannend voor T'' is, dus alle banen
$G(v)$ van knopen van T'' bevat/bedekt, volgt
dat $\{gT \mid g \in G\}$ juist alle knopen van T'
bedekt.
Daarbij is gT weer een boom $:= (gV(T), gE(T))$
omdat onder werking van G juist "adjacency/incidence"
bewaard blijft.

Tenslotte zijn deze bomen niet overlappend: want
als er een knoop $v \in T \cap gT$ is voor $g \neq 1$
dan werkt G niet vrij, want $G_v \neq \{1\}$.
En als er een lijn $T \cap gT$ is, dan werkt G
evenzeer niet vrij (ongeacht of dit met inversie is)

Wat hebben we dus: een partitie van T' in
gT, $g \in G$
"de rest". Dit zijn alle lijnen e (knopen zijn alle bedekt)
die niet in één van de $G(e) \in T'$ zaten, want
precies deze lijnen $G(e) \in T'$ worden op alle
ge, $ge \in gT$ afgebeeld, en alle $ge \in gT$ worden
ook geraakt op die manier, door de lift $e \in T$ van
$G(e) \in T'$ met een geschikte gh^{-1} te "bewerken."

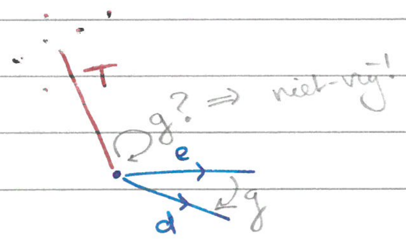
Neem dus een $G(e') \in T''$ lijn met $e' \notin T'$. Dan
heeft $G(e')$ een lift e en we weten dat alle knopen van
T' bedekt zijn dus er is een $\alpha(e') \in gT$ voor
een zekere $g \in G$. Maar we kunnen dan evengoed $g^{-1}e'$ als
representant van $G(e')$ kiezen zodat $G(e')$ zelfs
een lift e heeft met $\alpha(e) \in T$

tekening van het idee:



nu gaan we aantonen dat e' ook een unieke lift e heeft die "aan T vast zit", ie $\alpha(e) \in T$.

Want: als e en d lifts van e' zijn met $\alpha(e) \in T$, $\alpha(d) \in T$, wel omdat d en e dan beide in $G(e') = e'$ zitten volgt dat $gd = e$ voor een $g \in G$. maar $g \neq 1$ want $d \neq e$. Maar G werkt vrij terwijl dit juist (vanwege oriëntatiebehoud, dus $g \cdot \alpha(d) = \alpha(e)$) impliceert $gv = v$ voor $v = \alpha(d) = \alpha(e)$:



Dus e is uniek per e.
Zij daarom $B = \{e \in T' \mid e \notin T \text{ en } \alpha(e) \in T\}$
dit heet de verzameling "bruggen" tussen T en "getranslateerden" gT. Deze is dus in bijectie met $\{e' \in T' \mid e' \notin T'\}$

En bovendien is er voor elke $e \in B$ een unieke $g_e \in G$ met $\omega(e) \in g_e T$. Zij $S = \{g_e \mid e \in B\}$.

Construeer een nieuwe graaf T_T door elke gT tot één punt samen te trekken, en twee gT, hT's te verbinden als er een f is tussen gT en hT.

dus $\alpha(f) \in gT$ en $\omega(f) \in hT$.

3 KARAKTERISERING VAN VRIJE GROEPEN MET GRAAFWERKING EN NIELSEN-SCHREIER

def Voor een graaf Γ en quotgraaf $\overline{\Gamma} = G\backslash\Gamma$ met natuurlijke projectie $p : \Gamma \to \overline{\Gamma}$ die $e \mapsto G(e)$ $v \mapsto G(v)$ afbeeldt, is een lift van een deelgraaf $\overline{\Lambda} \leq \overline{\Gamma}$ een graaf $\Lambda \leq \Gamma$ zodat $p|_\Lambda : \Lambda \to \overline{\Lambda}$ een graafisomorfisme is.

Λ is dus een deelgraaf van Γ die $\overline{\Lambda}$ "representeert"

St. 3.13 Zij G vrij werkend op Γ, $\overline{\Gamma} = G\backslash\Gamma$. Dan is er voor elke deelboom $\overline{T} \leq \overline{\Gamma}$ een deelboom $T \leq \Gamma$ die een lift is voor $\overline{T}$.

Bew Zij Υ de verzameling deelbomen T van Γ die $p(T) \leq \overline{T}$ hebben en dat $p|_T$ injectief is. Dan is Υ partieel geordend met inclusie en elke keten $\{T_k\}_{k\in I}$ heeft een bovengrens $\bigcup_{k\in I} T_k$ die zelf in Υ ligt. $\Longrightarrow$

[ga na, analoog aan st. over maximale bomen]

Zorns lemma geeft dat Υ een max element T_0 heeft.

Nu moeten we alleen nog laten zien dat $p|_{T_0} : T_0 \to \overline{T}$ ook surjectief is. Hiervoor gebruiken we natuurlijk dat de werking van G vrij is.

Neem dus $p(T_0) \subsetneq \overline{T}$. Dan is er een lijn e' in $\overline{T}$ die niet wordt geraakt. Dan ligt ook één van de eindpunten v, w van e' niet in $p(T_0)$, anders zouden v, w verbonden zijn in $p(T_0)$ én nogmaals verbonden in $\overline{T}$ door e', zodat $\overline{T}$ een cykel bevat en niet een boom is.

Zij e een lift van e', dus een lijn in Γ met $p(e) = e'$

omdat G zonder inversie op de lijnen werkt kunnen we een oriëntatie aannemen, zvva zodat $\alpha(e) \in T_0$ en dan hebben we $\omega(e) \notin T_0$ want anders ligt $\omega(e') = p(\omega(e)) \in p(T_0) \subseteq \overline{T}$ en we hadden juist aangenomen $\omega(e) \notin \overline{T}$, anders kregen we een cykel.

$\Rightarrow$ breid T_0 uit tot graaf T_1 die naast $V(T_0)$ ook $\omega(e)$ bevat en naast $E(T_0)$ ook e bevat. Dan is T_1 samenhangend omdat T_0 dat is en ω eraan zit met e. En T_1 bevat geen cykels, want $\omega(e) \in T_0$ en $\omega(e)$ heeft graad 1.

en $p(T_1)$ is nog steeds <u>deelboom</u> van $\overline{T}$ want

$p(e) = e' \in E(\overline{T})$

$p(\omega(e)) = \omega(e') \in V(\overline{T})$

En $p|_{T_1}$ is nog steeds injectief want $e \notin E(T_0)$ en $e' \notin p(T_0)$, en $\omega(e) \notin V(T_0)$ en $\omega(e') \notin p(T_0)$

$\Rightarrow T_1 \in \Upsilon$ maar $T_0 < T_1$ tegenspraak met maximaliteit $\Longrightarrow p(T_0) = \overline{T}$ $\square$

<u>3.14</u> Karakterisering van vrije groepen met vrije werking op bomen.

Zij Γ boom waarop G vrij werkt.

Voor $T \leq \Gamma$ een lift van de opspannende boom T' van $\Gamma' = G\backslash\Gamma$ met een aangenomen oriëntatie op Γ (bewaard door G) en overerfd door Γ via natuurlijke projectie $p : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$.

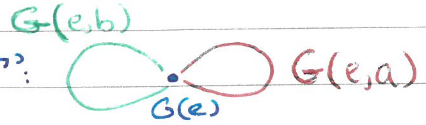
Zij $S = \{ g \in G \mid g \neq e_G, \exists e \in \Gamma \; \alpha(e) \in T, \omega(e) \in gT \}$

Dan is S een basis voor G en G een vrije groep

ihb. als Γ' eindig is dan is G vrij van rang $r = \#E(\Gamma') - \#V(\Gamma') + 1$.

Vbd $F_2 = F(a,b)$ werkt vrij op zijn eigen Cayley-graaf middels linksvermenigvuldiging $g.w = gw$ voor $g, w \in F_2$.

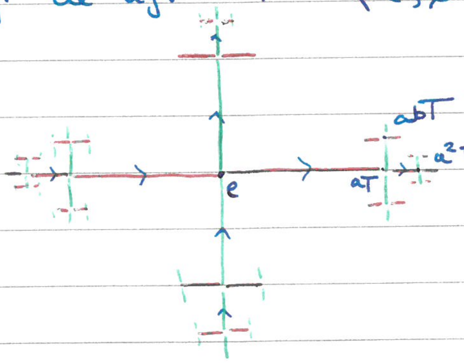
de quotiëntgraaf $F_2 \backslash \Gamma(F_2, \{a,b\})$ is te bepalen:
g zit in dezelfde baan als e_F, middels $g \cdot e_G = g$.
Dus F_2 werkt transitief op de knopen.
Echter, (g, ga) en (g, gb) zitten in andere banen want F_2 werkt vrij dus alleen e_G beeldt g op g af maar deze kan ga niet op gb afbeelden
Echter elke (g, ga) zit in de baan van (e, a) en elke (g, gb) in die van (e, b).

Quotiëntgraaf Γ': 

, met $T' = (G(e), \emptyset)$ opspannende boom.

Deze heeft de lift $T = (e, \emptyset)$ in Γ:

dit plaatje is het juiste

→ 

en we zien $S = \{ g \in G \setminus \{e_G\} \mid \exists e\ \alpha(e) \in T, \omega(e) \in gT \}$

$= \{a, b\}$ als we de juiste oriëntaties kiezen,

en anders wordt dit eventueel $\{a, b^{-1}\}$, $\{a^{-1}, b^{-1}\}$ of $\{a^{-1}, b\}$.

Bewijs van 3.14 :

we hebben een boom $T' \subseteq T'^{?}$ met lift $T \subseteq T$
een oriëntatie op T die in T' bewaard blijft
op de "equivalentieklasse - lijnen/knopen"

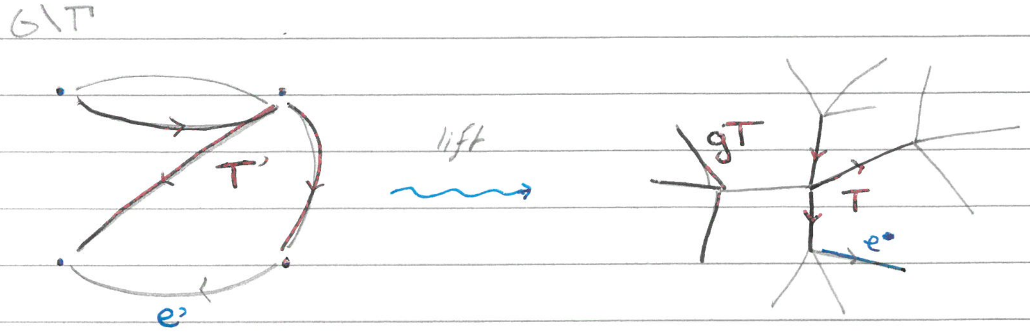
omdat T' opspannend voor T' is, dus alle banen
$G(v)$ van knopen van T' bevat/bedekt, volgt
dat $\{gT \mid g \in G\}$ juist alle knopen van T
bedekt.
Daarbij is gT weer een boom $:= (gV(T), gE(T))$
omdat onder werking van G juist "adjacency/incidence"
bewaard blijft.

Tenslotte zijn deze bomen niet overlappend: want
als er een knoop $v \in T \cap gT$ is voor $g \neq 1$
dan werkt G niet vrij, want $G_v \neq \{1\}$.
En als er een lijn $T \cap gT$ is, dan werkt G
evenzeer niet vrij (ongeacht of dit met inversie is)

Wat hebben we dus: een partitie van T in
gT, $g \in G$
"de rest". Dit zijn alle lijnen e (knopen zijn alle bedekt)
die niet in één van de $G(e) \in T'$ zaten, want
precies deze lijnen $G(e) \in T'$ worden op alle
ge, $ge \in gT$ afgebeeld, en alle $ge \in gT$ worden
ook geraakt op die manier, door de lift $e \in T$ van
$G(e) \in T'$ met een geschikte gh^{-1}-te "bewerken."

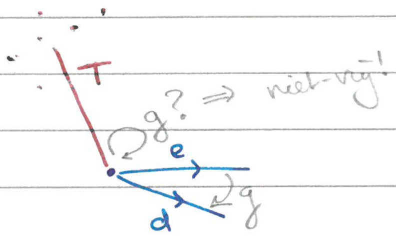
Neem dus een $G(e') \in T'$ lijn met $e' \notin T'$. Dan
heeft $G(e')$ een lift e en we weten dat alle knopen van
T bedekt zijn dus er is een $\alpha(e') \in gT$ voor
een zekere $g \in G$. Maar we kunnen dan evengoed $g\bar{e}'$ als
representant van $G(e')$ kiezen zodat $G(e')$ zelfs
een lift e heeft met $\alpha(e) \in T$

tekening van het idee:



nu gaan we aantonen dat e' ook een unieke lift e heeft die "aan T vast zit", ie $\alpha(e) \in T$.

Want: als e en d lifts van e' zijn met $\alpha(e) \in T$, $\alpha(d) \in T$, wel omdat d en e dan beide in $G(e) = e'$ zitten volgt dat $gd = e$ voor een $g \in G$. maar $g \neq 1$ want $d \neq e$. Maar G werkt vrij terwijl dit juist (vanwege oriëntatie behoud, dus $g \cdot \alpha(d) = \alpha(e)$) impliceert $gv = v$ voor $v = \alpha(d) = \alpha(e)$:



Dus e is uniek per e.
Zij daarom $B = \{e \in \Gamma \mid e \notin T \text{ en } \alpha(e) \in T\}$
dit heet de verzameling "bruggen" tussen T en "getranslateerden" gT. Deze is dus in bijectie met $\{e' \in \Gamma' \mid e' \notin T'\}$

En bovendien is er voor elke $e \in B$ een unieke $g_e \in G$ met $\omega(e) \in g_e T$. Zij $S = \{g_e \mid e \in B\}$.

Construeer een nieuwe graaf Γ_T door elke gT tot één punt samen te trekken, en twee gT, hT's te verbinden als er een f. is tussen gT en hT

dus $\alpha(f) \in gT$ en $\omega(f) \in hT$.

en $\binom{p}{i} = \frac{p!}{(p-i)!\,i!} = \frac{p\cdot(p-1)\cdots(p-i+1)}{i\cdot(i-1)\cdots 1}$ alleen als en $p > i > 0$

dan geldt dat het bovenste product precies een factor p heeft, terwijl het onderste product geen factor p heeft, want alle factoren in het product $i(i-1)\cdots 1$ zijn voor $i < p$ kleiner dan p en omdat p priem is kan het niet worden gevormd als product van (positief) kleinere factoren uit $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ de teller $p!/(p-i)!$ is door p deelbaar en de noemer $i!$ niet, dus is $\binom{p}{i}$ deelbaar door i alleen als $0 < i < p$ (anders $\binom{p}{0} = 1$ en $\binom{p}{p} = 1$)

$\Rightarrow (x+y)^p = x^p + y^p + p\cdot c$ voor $c = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} x^i y^{p-i}$ een in $\mathbb{Z}\{x^i y^{p-i}\}$ liggende term, en $p = \underbrace{1+\cdots+1}_{p \text{ term}} = 0$ als $\mathrm{char}(K) = p$

$\Rightarrow (x+y)^p = x^p + y^p + 0 = x^p + y^p$. dus $x \longmapsto x^p$ is homom.

(b) $f \in \mathbb{F}_2[X]$, $f = X^3 + X + 1$. & RILI, IGNORE THIS!

als $s = h^{-1}g$, dan $h^{-1}f$ is lijn van T naar $(h^{-1}g)T$ want $h^{-1}\alpha(f) \in T$ en $\omega(f) \in gT$ dus $h^{-1}\omega(f) \in h^{-1}gT$.

dus $h^{-1}f$ is een brug $\in B$. Hiermee zien we in:

$hT, gT \in T_T$ zijn verbonden door lijn $\Longleftrightarrow$ $h^{-1}gT$ heeft brug met T

Bovendien $hT = gT \Leftrightarrow T = h^{-1}gT \Leftrightarrow T \cap h^{-1}gT \neq \emptyset$
$\Leftrightarrow h^{-1}g = 1_G$.

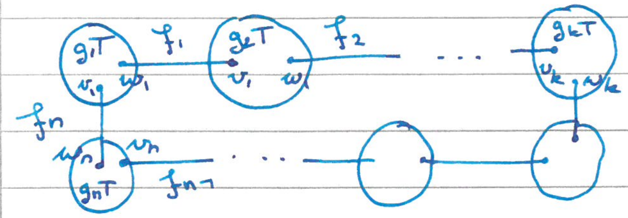
Oftewel, we kunnen, als we de verbinding tussen hT en gT "$s = h^{-1}g$" labelen, een isomorfisme van grafen maken tussen de cayleygraaf $\Gamma(G, S)$
$S \ni$
(het is inmiddels duidelijk dat S G voortbrengt, want hT en gT zijn verbonden alleen als $s = h^{-1}g \in S$)

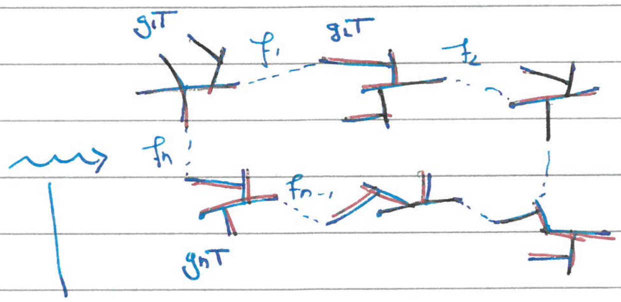
$\Rightarrow$ g_1T en g_2T zijn verbonden in T' $\iff$ $g_2 = g_1 s$ voor een $s \in S$
$\iff$ (g_1, g_2) is lijn in $T'(G,S)$!

surjectief: triviaal.
en de graaf T_T: $gT \longmapsto g$. (injectief want $gT = hT \Leftrightarrow h^{-1}gT = T \Leftrightarrow h^{-1}g = 1_G$).

Nu resteert aan te tonen dat T_T een boom is, want een groep met als $T'(G,S)$ een boom is vrij met basis S.

Stel er is een cykel in T_T, dan dat zou er als volgt uit zien:





Dan betekent dit dat, omdat elke gT eigenlijk een boom was en f_n juist een verbinding tussen bomen, er ook een cykel in T zat, tegenspraak

$\Rightarrow$ T_T is een boom, en uit elke $gT \in V(T_T)$ ontspringen precies ~~[illegible]~~ lijnen ~~[illegible]~~ voor elke $s \in S$ ie, $T_T \cong T'(G,S)$
waarbij we lieten zien $\langle S \rangle = G$ inderdaad

$\Rightarrow$ G is vrij met basis S $\boxtimes$

NIELSEN - SCHREIER ALS GEVOLG VAN 3.14

St.

3.15 Als F vrij is en $H \leq F$ ondergroep, dan is H ook vrij.
Als F van rang $m < \infty$ is en H van index $n < \infty$
Dan is H vrij van rang $\underline{r = n(m-1)+1}$.

Bew Zij S een basis voor F. F werkt (elke groep) vrij op de knopen V van zijn Cayley-graaf $\Gamma(F,S)$ door (links-) vermenigvuldiging.
En omdat F vrij is, geen element van orde 2
dus werkt F vrij op de lijnen, dus op $\Gamma(F,S)$.

Een ondergroep H van F werkt evengoed op $\Gamma(F,S)$ en ook vrij want dan $H_v \subseteq F_v = \{1_F\}$, dus elke stabilisator is triviaal.

$\Rightarrow$ met 3.14 dat H vrij is en dat $X = \{g_e \mid e \in B\}$ een basis vormt.

Maar als H index n in F heeft, dan zijn er dus precies $f_1, \dots f_n$ met $F = \bigsqcup_{i=1}^{n} f_i H$
en twee knopen $g, f \in F$ liggen in dezelfde baan $\Leftrightarrow$ $g^{-1}f \in H \Leftrightarrow gH = fH$
en twee lijnen (g, gs) (h, hs) in dezelfde baan $\Leftrightarrow$ $\overset{s=s'}{g^{-1}h \in H}$ en
$s^{-1}g^{-1}hs \in H \Leftrightarrow$
$g^{-1}h \in H \Leftrightarrow \overset{s=s'}{gH = hH}$

er zijn dus in $G \backslash \Gamma$ precies n knopen voor de n cosets $hH \subseteq F$ en precies mn lijnen voor de n cosets $hH \subseteq F$ die elk in m banen uiteenvallen omdat twee lijnen alleen in deelfde baan liggen als ook hun labels s gelijk zijn

$\Rightarrow$ n knopen, nm lijnen

$\Rightarrow$ $nm - n + 1$ lijnen buiten de opspannende boom van $n-1$ lijnen, $\#B = nm - n + 1$
$\Rightarrow$ H heeft basis X met $\#X = \#B = nm - n + 1$
$= n(m-1)+1$

□

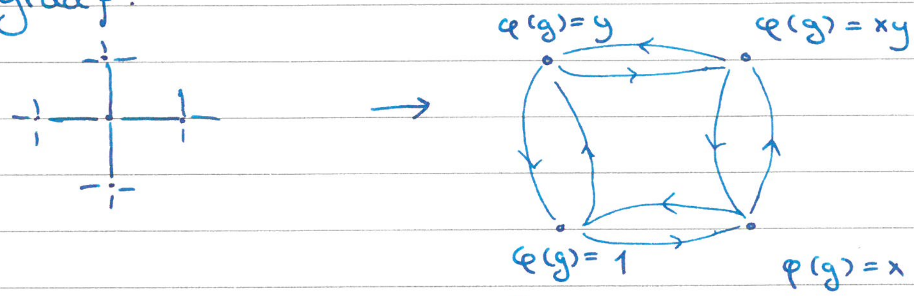
Meer over stelling van Nielson - Schreier

St. $F = F_m$ vrije groep $H \leq F$ en $[F:H] = n$
Dan is H vrij van rang $n(m-1)+1$

Vbd $F = F(a,b)$, $\varphi : F \to V_4$ $a \mapsto x$, $b \mapsto y$
en $V_4 = \{1, x, y, xy = yx\}$ Zij $H = \ker \varphi$.

restklassen : $\{ g \in F \mid \varphi(g) = c \}$ voor een $c \in V_4$

quotiëntgraaf :



neem T' opsp. boom van $H \backslash T = T'$

Gevolg: voor elke $k \geq 2$ bevat F_2 een o.g. $H \leq F_2$
van eindige index met $H \cong F_k$ met F_k vrij rang k.

Bew. We hoeven alleen een $H \leq F_2$ te vinden met index n
zodat $k = n(2-1)+1$ $\Rightarrow$ zodat $n = k-1$

neem gewoon een homom $F_2 \to \mathbb{Z}_{k-1}$ met $H = \ker \varphi$

3.3 Generatoren / VOORTBRENGERS VAN ONDERGROEPEN

def transversaal T is een verzameling $T \subseteq G$ zodat $\bigsqcup_{t \in T} tH = G$ voor $H \leq G$ ondergroep

— representantensysteem

— let op: rechtstransversalen: $\bigsqcup_{t \in T} Ht = G$
linkstransversalen: $\bigsqcup_{t \in T} tH = G$.

def T transversaal heet Schreier-transversaal als G vrije groep, $H \leq G$ en elk gereduceerde woord $t = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \in T$ ook $s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_k^{\varepsilon_k}$ voor $k = 0, \dots n-1$ in T ligt.

M.a.w voor een $t \in T$, wanneer we het unieke pad van $e \to t$ in $\Gamma(G,S)$ tekenen moet elk deelpad vanaf e er ook in liggen

De deelgraaf van Γ die de knopen $t \in T$ en lijnen op deze paden van transversalen bevat, is dus een boom.

Omdat T alle banen representeert en G vrij op $\Gamma(G,S)$ werkt, volgt dat deze boom zelfs een lift is van de opspannende boom van $G \backslash \Gamma$.

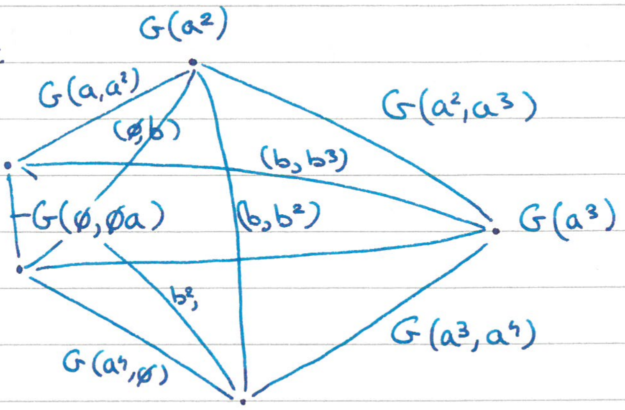
Andersom geeft een lift van een opspannende boom van $G \backslash \Gamma$ juist een boom met alle representanten rond e als knopen, en dus een Schreier-transversaal

Vbd neem als normaalondergroep $H = \ker \varphi \trianglelefteq F_2$ door $\varphi : F_2 \to C_5$, $a \mapsto \alpha$ en $b \mapsto \alpha^2$. Elke coset is van de vorm $\{ w \in F_2 \mid \varphi(w) = \alpha^m \}$ voor $m = 0, 1, \dots 4$.

de quotiëntgraaf ziet eruit als:

$H(a) = \{\varphi(w) = 1\}$

$H(\emptyset) = \{\varphi(w) = 0\}$



lift geeft

opspannende boom van Γ' uit Schreier-transversaal.

— dat een Schreier-transversaal altijd (dus ook voor oneindige soorten S) bestaat, kan worden beweren. Zie het dictaat. (Welordeningsprincipe en lexicografische ordening op de gereduceerde woorden over $S^{\pm}$)

St (relatie Schreier-T tot generators van H):
Zij H o.g. van vrije groep F met basis S en T de Schreier-transversaal voor H in F.

noteer met $\bar{g}$ het unieke T-element $\bar{g}$ zodat $H\bar{g} = Hg$.

Dan is $R = \{ ts(\overline{ts})^{-1} \mid s \in S, t \in T, ts \neq \overline{ts} \}$ een basis voor H. (ihb brengt R H voort)

Bew Zij $\Gamma = \Gamma(F,S)$, dan werkt H vrij op Γ. De transversaal T induceert een boom T op Γ die een lift is van een opspannende boom van $\Gamma' = F \backslash \Gamma$

3.14 $\Rightarrow$ H is vrij met basis $X = \{ h \in H \mid \exists e \in \Gamma \; \alpha(e) \in T, \omega(e) \notin_h T \}$
Zo'n lijn e is van de vorm t, ts voor een $t \in T$, $s \in S$ en $Hts = Hu$ voor een unieke $u \in T$.

(Deze voortbrengers heten de Schreier-voortbr. van H)

noem die u dus $u = \overline{ts}$. We willen nu precies de $h \in H$ waarvoor er een e is met $\alpha(e) \in T$, dus $\alpha(e) = t \in T$, en $\omega(e)$ $\in hT \neq T$ en dit is dan en slechts alleen het geval als $\omega(e) = h\overline{ts}$, en ts niet gelijk is (als woord) aan $\overline{ts} \in T$.

$$\text{dus} \quad h \in \{ h \in H \mid \exists e \ \alpha(e) \in T, \omega(e) \in hT \} \iff$$
$$h\overline{ts} = ts, \ ts \neq \overline{ts} \iff$$
$$h = ts(\overline{ts})^{-1}, \ ts \neq \overline{ts} \qquad \boxtimes$$

Vbd stel dat we weer kijken naar $H = \ker(\varphi)$. $\varphi : a \mapsto \alpha, b \mapsto \alpha^2$. Deze H heeft index 5 in $F_2 = F(a,b)$ en Schreier-transversaal $\{a^n \mid n = 0,1,..4\}$. Per Nielsen-Schreier heeft het breng $10-5+1 = 6$ voortbrengers, dus proberen we:

$a^n a (\overline{a^n a})^{-1} \neq e \iff n = 4$ dus a^5 is zo'n voortbrenger.

Der rest is automatisch (voor $n = 0, 1, \cdots 4$) $\to$ $a^n b (\overline{a^n b})^{-1} = a^n b (\overline{a^{n+2}})^{-1}$

b telt als a^2 (mod5)

$=$

ba^2, aba^3, a^2ba^4, a^3b

$$\Rightarrow H = \langle a^5, ba^2, aba^3, a^2ba^4, a^3b \rangle$$

ALGEMENE GROEPSWERKINGEN.

Schreier voortbrengers zijn op algemene groepswerkingen van toepassing:

Als G werkt op verz Ω : baan-stabilisatorst. geeft een bijectie tussen $G/G_\omega \xrightarrow{\sim} G(\omega) : gG_\omega \mapsto g$

We bekijken hierbij rechtsacties $\omega \mapsto \omega g$ omdat dit aansluit op (g, gs) in cayleygraaf.