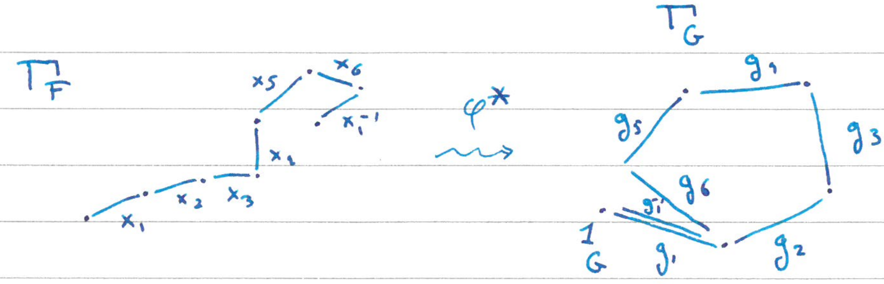
4 # PRESENTATIES VAN GROEPEN

Zij $G = \langle \{g_i\}_{i\in I} \rangle$ een groep m. voortbrengers $\{g_i\}_{i\in I}$
Neem $F(\{x_i\}_{i\in I})$ vrije groep over $X=\{x_i\}_{i\in I}$ een alfabet dat bijectief is met $\{g_i\}_{i\in I}$ middels $x_i \overset{\varphi}{\mapsto} g_i$

De universele eigenschap geeft enerzijds dat er een $\varphi^* : F \to G$ is die homomorfisme is en die φ uitbreidt. Anderzijds is φ^* surjectief dus $G \cong F/\ker \varphi^*$, een factorgroep van F.

Anderzijds wordt de kern van φ^* precies beschreven door alle relatoren van voortbrengers g_i in $\Gamma(G, \varphi(X)) = \Gamma_G$ want dit zijn alle niet-triviale woorden op de voortbrengers van G die gelijk zijn aan 1_G, en een woord in $F(X)$ op X is dus precies in de kern gelegen als het op zo'n woord afgebeeld wordt.



We willen nu $\ker(\varphi^*)$ beschrijven met zo min mogelijke "relatoren". Hiertoe merken we het volgende op:

$$uvu^{-1} \in \ker(\varphi^*) \Leftrightarrow v \in \ker(\varphi^*) \quad \text{, want } \ker(\varphi^*) \trianglelefteq F(X)$$

In de cayleygraaf: $g_1 \cdots g_k$ is een circuit (van labels) desda het subwoord $g_i \cdots g_{k-i+1}$ met $g_i \neq g_{k-i+1}^{-1}$ een cykel is. We kunnen dus alle circuits beschrijven door alle cykels gebaseerd in 1_G te beschrijven en vervolgens te eisen :

def De normale afsluiting R^G van G groep, $R \subseteq G$, is $\bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ R \subseteq N}} N$, dus de kleinste normaaldeler van G die R bevat.

~~we zien in dat $R^G = \langle grg^{-1} \mid r \in R, g \in G \rangle$~~ $\underbrace{}_{}$ $= S$ $= \langle S \rangle$

~~want een kant op zien we: $r \in R$ zit in $\bigcap N$,~~

~~en $\bigcap N \trianglelefteq G$ dus $grg^{-1} \in N^{\in R^G}$, dus $S \subseteq \bigcap N$ dus $\langle S \rangle \subseteq \bigcap^N$~~

~~de andere kant op zien we dat als $n \in R^G$,~~

Zij nu $S = \{grg^{-1} \mid r \in R, g \in G\}$ en $R^G = \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ R \subseteq N}} N$. Dan laten we zien $\langle S \rangle = R^G$.

$\subseteq$: $r \in R^G$ en $R^G \trianglelefteq G$ dus $grg^{-1} \in R^G$ voor elke $r \in R$, $g \in G$

$\supseteq$: $\langle S \rangle$ is een normaaldeler $\langle S \rangle \trianglelefteq G$, want

een $s = (y_1 r_1 y_1^{-1})^{\pm} \cdots (y_k r_k y_k^{-1})^{\pm} \in \langle S \rangle$ heeft:

$= y_1^{\pm} r^{\pm} y_1^{\mp} y_2^{\pm} r_2^{\pm} y_2^{\mp} \cdots y_k^{\pm} r_k^{\pm} y_k^{\mp}$ zodat $gsg^{-1} =$

$= g y_1^{\pm} r^{\pm} y_1^{\mp} g^{\mp} g^{\pm} y_2^{\pm} \cdots g^{\pm} y_k^{\pm} r_k^{\pm} y_k^{\mp} g^{\mp}$

$= ((gy_1) r (gy_1)^{-1})^{\pm} \cdots ((gy_k) r (gy_k)^{-1})^{\pm}$

$\in S$ dus, want van deze vorm. $\Rightarrow S \trianglelefteq G$, en $R \subseteq S$

dus $\bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ R \subseteq N}} N \subseteq S \implies R^G \subseteq S$.

$\boxtimes$

Meer precies is $S = R^G = \prod_{i=1}^{k} y_i r_i^{\pm} y_i^{-1}$, $r_i \in R$, $y_i \in G$.

Def voor $G = \langle \{g_i\}_{i \in I} \rangle$ grp en $X = \{x_i\}_{i \in I}$ in bijectie met $\{g_i\}_{i \in I}$ is $\varphi : X \longrightarrow G$ door $x_i \longmapsto g_i$ uniek uit te breiden tot $\varphi^* : F(X) \to G$ en dan is

i) Een $r \in \ker \varphi^*$ een <u>relator</u> voor G en "$r = 1$" een relatie.
(meer alg. $u = v$ als $u^{-1}v \in \ker \varphi^*$)

ii) $R \subseteq F$ heet definiërende relatoren als $R^F = \ker(\varphi^*)$
zodat $G \cong F/R^F$.

iii) We noteren $\langle X \mid R \rangle$ voor F/R^F, wat isomorf is met G.
Dit heet de <u>presentatie</u> van G.

4.3 St Zij $G = \langle \{g_i\}_{i\in I} \rangle$ en $\varphi : F(X) \longrightarrow G$ natuurlijk epimorfisme door $x_i \longmapsto g_i$ (universele eigenschap geeft dat dit bestaat).

Zij $R \subseteq F$ zodat $R \subseteq \ker\varphi$, zij $F/R^F = \langle X \mid R \rangle$
Dan is G isomorf met een factorgroep van F/R^F

Bew. $R \subseteq \ker\varphi$ dan $R^F \subseteq \ker\varphi$ want $\ker\varphi$ is normale deelgroep van F, en R^F is de kleinste die R bevat.
Wegens de derde isomorfiestelling geldt dan dat

$$(F/R^F)/(\ker\varphi/R^F) \cong G$$ □

We kunnen dit ook uitdrukken in diagram:
$\pi : X \to F/R^F : x \mapsto xR^F$. Dan voor alle $\rho : X \to G$ met $\rho(r) = e$ $\forall r \in R$ is er een uniek homom $\rho^* : F/R^F \to G$ zodat $\rho^* \circ \pi = \rho$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho : \rho|_R = e"'] \arrow[d, "\pi"] & G \\ F/R^F \arrow[ur, dashed, "\exists! \rho^* : \boxed{\rho^* \circ \pi = \rho}"'] & \end{tikzcd}$$

⊠

Als relaties R in G gelden, dan induceert dit een homomorfisme $\varphi : F(X) \to G$, $\varphi(x_i) = g_i$ tot een hom. $\overline{\varphi} : F(X)/R^F \to G : x_i R^F \mapsto g_i$

Het is dan nog aan te tonen dat geldt dat $\ker\overline{\varphi}$ triviaal is, want dan volgt dat $\overline{\varphi}$ het isomorfisme $F/R^F \cong G$ is.

Dit kan men aanpakken door elke $w \in F/R^F$ middels de relaties op een "normaalvorm" te schrijven en hierna vervolgens aantonen dat $\varphi(w) = 1_G \Leftrightarrow w = 1_{F/R^F}$.

4.2 PRESENTATIES VAN KNOOP- EN LINKGROEPEN

voorgaande behandelde knopen en knoopgroepen.

— presentaties : om een knoopgroep $G(\mathcal{K})$ beter te bestuderen kan een presentatie helpen. Twee benaderingen bestaan:

- Wirtinger-presentatie
- Dehn-presentatie.

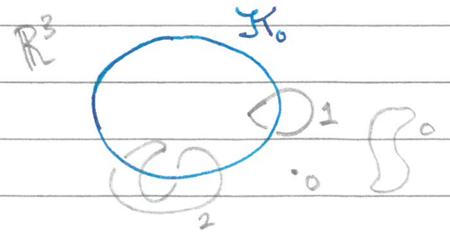
Beide gaan uit van een 2D-projectie vd knoop. En nemen zvva aan dat bij elke kruising van lijnen, er slechts twee lijnen in hetzelfde punt kruisen. Dit is nooit onmogelijk.

• **WIRTINGER PRESENTATIE** : neem oriëntatie op de knoop en oriënteer lussen middels Rechterhand-regel

- neem een lus om elke lijn in de projectie (lijn loopt van kruising waar hij de onderste draad is tot andere kruising waar hij de onderste draad is)

Opm: De unknot $\mathcal{K}_0$ is een deformatie van de cirkel S^1. Deze heeft een knoopgroep $G(\mathcal{K}_0) \cong$ .. ? $\mathbb{Z}$, want Elk pad gaat precies $k \in \mathbb{Z}$ keer "door de knoop" en twee zulke paden zijn verschillend (oriëntatie voor −1..) en concatenatie van paden n_1, n_2 geeft een pad dat n_1+n_2 keer door de knoop gaat.

Triviaal is elk pad dat nul keer door de knoop gaat, want dit kan worden samengetrokken tot een punt.



- neem een lus om elke lijn als voortbrenger. Relaties komen precies van de kruisingen ..

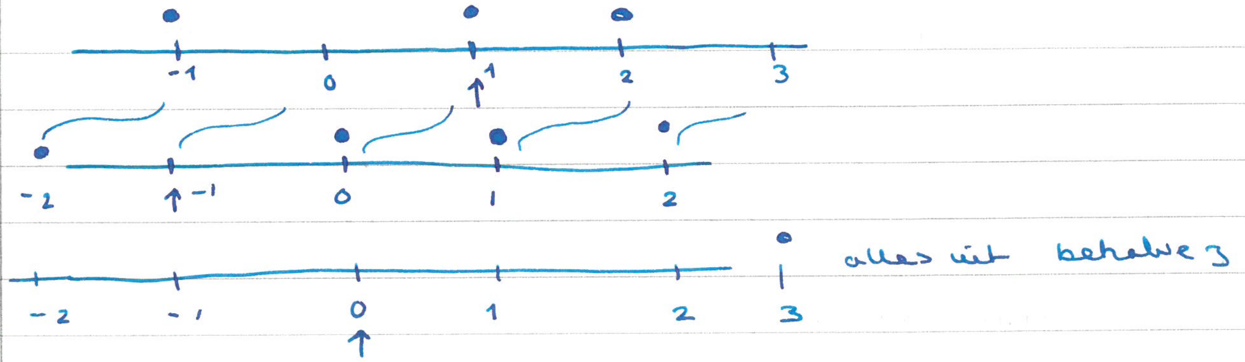
def **Lamplightergroep:**

er is een oneindig lange straat, met op elke $n \in \mathbb{Z}$ een lantaarn. De opsteker (lamplighter) staat op $k \in \mathbb{Z}$

Zij $I_g = \{ i \in \mathbb{Z} \mid \text{lamp } i \text{ staat aan} \}$, I is altijd eindig!
De lampstand is dan (I_g, k)

Dan definiëren we $(I_g, k) \cdot (I_g', k') =$

1) zet de oorsprong van (I_g', k') in k, en neem exclusieve-of van de lampen:



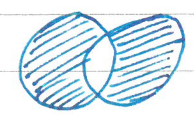
Preciezere formulering:

neem $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ maar met eindige support

dus identificeer $g \in N$, $(g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ met I_g

Dan is de groep $N \rtimes_\alpha H$ met $H = \mathbb{Z}^+$
en $k \in \mathbb{Z}$ werkt op N door $\alpha_k \in Aut(N)$:
α_k verschuiving $I_{\alpha_k(g)} = \{ i+k \mid i \in I_g \}$

En de groepsbewerking op N is Δ, het symmetrisch verschil $A \Delta B := A \cup B - A \cap B$
$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



wat is een presentatie voor deze groep?

- wat zijn de voortbrengers?

$t = (\emptyset, 1) \qquad a = (\{0\}, 0)$

Want om lamp k aan te zetten, i.e. $(\{k\}, 0)$ te bereiken, moet je $t^k a t^{-k}$ nemen en dus $(\{i_1, \dots i_s\}, k) = t^{i_1} a t^{-i_1} \dots t^{i_s} a t^{-i_s} t^k$

$\Rightarrow$ t en a brengen groep voort.

Wat zijn de relaties?

- (t heeft oneindige orde)
- $a^2 = 1$
- $t^i a t^{-i}$ en $t^j a t^{-j}$ verwisselen / commuteren $\Rightarrow$

$t^i a t^{-i} t^j a t^{-j} = t^j a t^{-j} t^i a t^{-i} \qquad \Rightarrow$ neem $k = j-i$ dan

~~$at^k a t^{-k} = t^k a t^{-k} a$~~

$a t^{j-i} a t^{i-j} = t^{j-i} a t^{i-j} a \qquad \Rightarrow$

$a t^k a t^{-k} = t^k a t^{-k} a$ dus voor elke $k \in \mathbb{Z}$ verwisselen a en $t^k a t^{-k}$.

$\Rightarrow$ presentatie $L_2 = \langle t, a \mid a^2, [a, t^k a t^{-k}] (k \in \mathbb{Z}) \rangle$

$\square$

KNOPEN

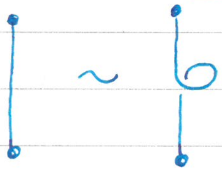
Def Een knoop $\mathcal{K}$ is het beeld van een injectieve gladde afbeelding $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ met $\theta(0) = \theta(1)$

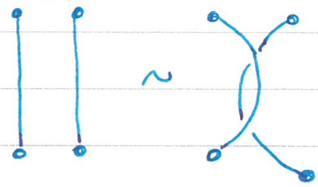
Def de knoopgroep $G(\mathcal{K})$ is de fundamentele groep $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{K})$ van het complement van $\mathcal{K}$ dus!

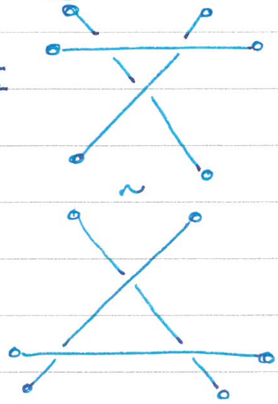
— idee: voortbrengers van $G(\mathcal{K})$ zijn lussen rond de strengen van de knoop in een 2d-projectie.

— probleem: er zijn verschillende projecties van een knoop!

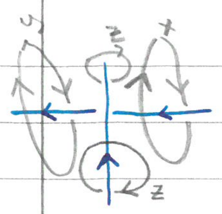
Feit alle knoopprojecties v.e. $\mathcal{K}$ zijn equivalent zijn equivalent middels Reidemeister zetten. Die zetten zijn:

I 

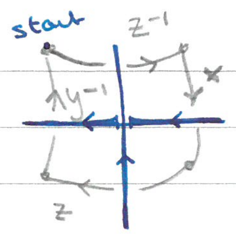
II 

III 

En alle equivalenties zijn zo beschreven. (Stelling TL;DR).

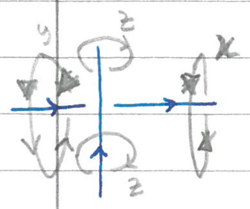


$\rightsquigarrow$

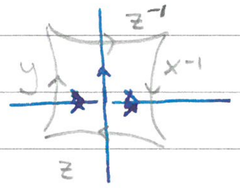


relatie : $y^{-1} z x z^{-1} = 1$

$\Rightarrow$ $\underline{zx = yz}$



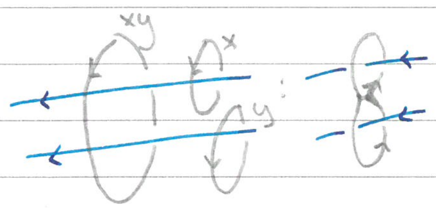
$\rightsquigarrow$



relatie : $y z x^{-1} z^{-1} = 1$ (*)

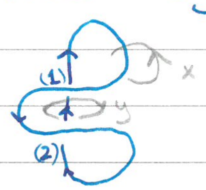
$\Rightarrow$ $\underline{yz = zx}$

deze voortbrengers zijn voortbrengers want als een will. lus om meerdere "strands" gaat, kunnen we deze samenstellen :



(*) Oftewel, de oriëntatie van de onderste draad maakt niet uit voor de relatie : er volgt dus evengoed $xz = zy$ want noem x y en y x.

WIRTINGER BIJ UNKNOT : teken $\mathcal{U}_0$ anders, n.l. als



$\Rightarrow$ 2 voortbrengers x, y

2 relaties (1) $yx = xx$

(2) $xx = yx$

$\Big\}$ $x = y$, dus

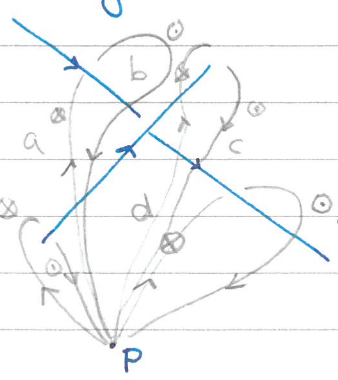
$\langle x, y \mid yx = xx \rangle = \langle x, y \mid y = x \rangle = \langle x \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}^+$ zoals we weten.

DEHN :

- verdeel het platte vlak in ingesloten segmenten die elk door strands worden afgebakend: voortbrengers[x] voor elke segment en relaties bij kruisingen als volgt :

  └ n.l. de lus die door het buitenste vlak gaat (p ligt hierin) en het papier in bij

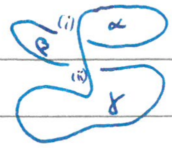
  x



we zien niet noodzakelijk dat $ab^{-1} = dc^{-1}$

maar $\underline{\text{wel}}$ $ad^{-1} = bc^{-1}$, want

dit is de lus om de bovenste draad met steeds dezelfde oriëntatie.

DEHN BIJ UNKNOT :  1

1 is eenheid, we nemen deze niet echt mee maar is handig met α bedoelen we evengoed: $1^{-1}\alpha$ " heen door α, terug door 1 ".

$$\left.\begin{array}{ll}(i): & 1^{-1}\alpha = \beta^{-1}1 \\ (ii): & 1^{-1}\gamma = \beta^{-1}1\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \gamma = \beta^{-1}$$

dus $\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha = \beta^{-1}\ \gamma = \beta^{-1} \rangle$
$= \langle \alpha, \gamma \mid \gamma = \alpha \rangle$
$= \langle \alpha \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}^{+}$

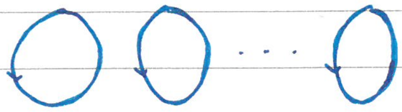
(note $\mathbb{Z} \cong F_1$ vrije groep rang 1).

Vb a klaverbladknoop

KNOOPGROEP $\rightsquigarrow$ GENERALISATIE : LINKGROEPEN

def Een link $\mathcal{L}$ is een collectie van knopen $\mathcal{L} = \{\mathcal{K}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ met $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_\beta = \emptyset$, i.e. de knopen lopen" niet door elkaars pad heen".

Vbd triviale link met n componenten : n kopieën van $\mathcal{K}_0$ die niet "entangled" zijn:



def Linkgroep $G(\mathcal{L}) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - \cup\mathcal{L})$

Vbd voor triviale n-componenten link L_0^n is $G(L_0^n) \cong F_n$.