1 CAYLEY - GRAAF

1.1 def Een graaf Γ is een tupel V, E waarbij elke $e \in E$ geassoc. is met een $\{v, w\}$ waarbij $v, w \in V$

e heet een kant of lijn
v, w heten knopen of punten

v, w heten in dit geval verbonden of naburig

men staat toe dat er meerdere $e, e' \in E$ met dezelfde $\{v, w\}$ geassoc. kunnen worden, en tevens dat $v = w$. In laatste geval heet e een lus.

def een graaf zonder multipele lijnen of lussen heet simpel. In een simpele graaf kan elke $e \in E$ uniek geïdentificeerd worden met een $\{v, w\} \in V$ zodat $v \neq w$

de graad of valentie van een knoop $v \in V$ is het aantal keren dat v in een $\{v, w\}$ geassocieerd met een $e \in E$ voorkomt.
Lussen dragen hierbij 2 bij aan de valentie

Als elke knoop eindige valentie heeft, heet Γ locaal eindig. Als elke knoop graad m heeft, heet Γ m-regulier.

def Een pad in een graaf is een alternerende rij $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ van $v_i \in V$, $e_i \in E$ waar e_i geass. is met $\{v_{i-1}, v_i\}$. Het aantal lijnen in een pad heet de lengte

Een pad heet gereduceerd als het geen backtracks bevat. Een backtrack is een deelrij
v, e, w, e, v.

Een graaf heet samenhangend als er "tussen" elk paar $(v,w) \in V \times V$ een pad bestaat $(v, e, \dots e', w)$

opm: als men de eindige-lengte-definitie van een pad wil ontwijken en ook paden van oneindige lengte wil toelaten, moet men dit doen

"een pad is een deelgraaf Γ' van Γ zodat Γ' een boom is met samenhang en geen knopen met valentie groter dan 2"

⇒ men kan bewijzen dat zo'n pad ofwel
- eindig is met twee "eindpunten" van graad 1
- oneindig is met
  - één eindpunt
  - geen eindpunten

maar er zijn i.h.a. geen oneindige bomen die twee eindpunten hebben.. Het bewijs en de betere definitie voor paden komt uit de topologie dus laten we hier achterwege :-)

Een pad heet gesloten als begin- en eindpunt gelijk zijn. Een gesl. pad van lengte ≥ 1 is een circuit. Een circuit met verschillende tussenknopen $v_1, \dots v_{n-1}$ heet een cykel

In het eindige geval kan elk circuit "worden opgedeeld" in unieke cykels, i.e. $(v, e_1, v_1, \dots e_n, w)$ een circuit, dan zijn er cykels
$(v, e_1, \dots, e_{n_1}, v_{n_1}) \dots (w, e_{1_m}, \dots e_{n_m}, w)$
zodat $v_{n_i} = v_{1_{i+1}}$ en $(v e_1 \dots e_{n_1} v_{n_1} e_{1_2} \dots e_{n_m} w)$
$= (v, e_1 \dots e_n w)$

voor bekende grafen zie syllabus.

— opm grafen zijn tot nu toe "ongericht", de kanten hebben geen richting.

een boom is een graaf zonder cykel die samenhangt.

Equivalent is een boom een graaf waarin tussen elk paar knopen een uniek pad is. Deze heet de geodesic

Equivalent is dat een boom een graaf T is zodat $E(T)$ minimaal is zodat T samenhangt dat wil zeggen voor $T' \subseteq T$ met $V(T') = V(T)$ $E(T') \subsetneq E(T)$ geldt dat T' niet samenhangt.

notatie $T' \subseteq T$ van grafen wil zeggen $V(T') \subseteq V(T)$ en $E(T') \subseteq E(T)$: deelgraaf.

def 1.4 v. grafen T, T' is een graafisomorfisme $\phi : T \to T'$ een paar ϕ_E, ϕ_V die bijectief $V(T) \to V(T')$, $E(T) \to E(T')$ zijn zodat als $e \in E$ $\{v, w\}$ verbindt dan verbindt $\phi_E(e)$ $\{\phi_V(v), \phi_V(w)\}$.

Voor simpele grafen, waar maar één e tussen v en w kan zijn, wordt ϕ_E geheel vastgelegd door ϕ_V. Dus men kan daar net zo goed ϕ_V voor ϕ nemen.

in een gerichte graaf is elke $e \in E$ geassoc. met een geordend paar $(v, w) \in V \times V$. notatie is daarnaast $\alpha(e) = v$, $\omega(e) = w$, en $\bar{e}$ is met (w, v) geassoc., dus $\alpha(\bar{e}) = w$, $\omega(\bar{e}) = v$.

Een isomorfisme van een graaf naar zichzelf is een graafautomorfisme

1.6 def Een werking van een groep G op een verz. Ω is een afbeelding $G \times \Omega \to \Omega$ zodat voldaan is aan:

- $g(h\omega) = (gh)\omega \quad \forall g,h \in G \ \forall \omega \in \Omega$
- $e\omega = \omega \quad \forall \omega \in \Omega$

— een groepswerking induceert een homomorfisme $G \to S_\Omega$ want $g\cdot : \Omega \to \Omega$ is bijectief (ga na).
Dit homomorfisme is injectief a.s.a. alleen e een triviale werking op Ω heeft.

def voor gr.w. v. G op Ω en $\omega \in \Omega$ heet

- $G(\omega) = \{ g\omega \mid g \in G \} \subseteq \Omega$ de baan van ω
- $G_\omega = \{ g \in G \mid g\omega = \omega \} \subseteq G$ de stabilisator van ω

1.7 Baan - Stabilisator - stelling:

(i) G_ω is een ondergroep van G; dus we kunnen
(ii) de cosets G/G_ω bekijken en vinden een bijectie $G/G_\omega \to G(\omega)$ door $gG_\omega \mapsto g\omega$.

Bew. als $g,h \in G_\omega$ dan $(gh)\omega = g(h\omega) = g\omega = \omega$
dus $gh \in G_\omega$
en als $g \in G_\omega$ dan $g^{-1}\omega = g^{-1}(g\omega) = (g^{-1}g)\omega = e\omega = \omega$
dus $g^{-1} \in G_\omega$
en $e\omega = \omega$ dus $e \in G_\omega$. $\Rightarrow$ (i)

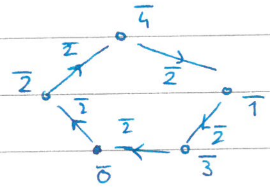
(ii) we laten zien dat $gG_\omega \mapsto g\omega$ welgedefinieerd is.
Als $gG_\omega = hG_\omega$ dan $h^{-1}g \in G_\omega$ dus $(h^{-1}g)\omega = \omega$,
dus $h((h^{-1}g)\omega) = h\omega$, dus $(hh^{-1}g)\omega = h\omega$ dus $g\omega = h\omega$
$\Rightarrow gG_\omega \mapsto g\omega$ welgedefinieerd (onafh. van repr. $g \in G$)

is injectief want $g\omega = h\omega \Rightarrow h^{-1}g \in G_\omega \Rightarrow gG_\omega = hG_\omega$.
is surjectief want voor $g\omega \in G(\omega)$ nemen we $gG_\omega \in G/G_\omega$.

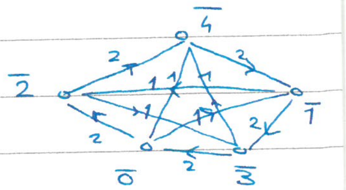
1.8 voor $G=\langle S\rangle$ groep voortgebracht door $S\subseteq G$, heet
def de Cayleygraaf $\Gamma=\Gamma(G,S)$ van G wrt S de gerichte graaf met $V(\Gamma)=G$ en $E(\Gamma)=\{(g,gs)\mid s\in S, g\in G\}$

welke gelabeld zijn als s.

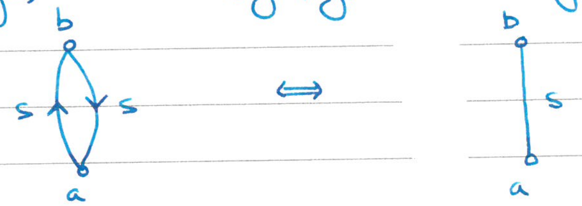
Vbd $\mathbb{Z}_5$ met $S=\{\bar{2}\}$:



met $S=\{\bar{2},\bar{1}\}$



N.B. als $s\in S$ orde 2 heeft dan kan men de multipele verbindingen (g,gs) en (gs,g) vervangen door één ongerichte:



— G werkt transitief op de knopen van elke S's Cayleygraaf $\Gamma(G,S)$, omdat $g\in G$ de eenheid 1 $1\in V(\Gamma)$ naar g beeldt, dus elke $g\in G$ valt in $G(1)$.

def een groep G werkt als volgt op een graaf Γ:
een groep heet "te werken" op Γ als de afb. $\phi_V^{(g)}: v\mapsto gv$ op $V\to V$ en $\phi_E^{(g)}: e\mapsto ge$ graaf-automorfisme $(\phi_V^{(g)},\phi_E^{(g)})=\phi^{(g)}$ vormen

dus als de werking op E conformeert met de incidenties. G induceert een homom. $G\to \mathrm{Aut}(\Gamma)$
$g\mapsto \phi^{(g)}$

we noteren voortaan de eenheid van G met 1 om verwarring met lijn e te voorkomen.

— G werkt ook transitief op de lijnen van $\Gamma(G,S)$ die hetzelfde label $s\in S$ hebben, want g beeldt $(1,s)$ op (g,gs) af en in elke knoop g is er een unieke lijn (g,gs) die g verlaat.

Dit geeft dus een afbeelding $\phi : g \mapsto \phi^{(g)} \in Aut(T)$ en dit is een injectief homom, gezien alleen 1 $\phi^{(1)} = id$ geeft, want alleen 1 beeldt de knoop $1 \in V(T)$ op zichzelf af.

St. Als we ons beperken tot $Aut^+(T)$, de graafautomorfismen die ook de oriëntatie van de lijnen en labels bewaren, dwz T is een gerichte graaf en voor lijn (v,w) label s geldt $\phi_E((v,w)) = (\phi_V(v), \phi_V(w))$ label s en dus niet $\phi_E((v,w)) = (\phi_V(w), \phi_V(v))$, dan geeft de werking G op T zelfs een isomorfisme $G \xrightarrow{\sim} Aut^+(T)$

Bew. injectiviteit van $\phi : g \mapsto \phi^{(g)} \in Aut(T)$ is al aangetoond. Nu nog te laten zien dat $\phi(G) \subseteq Aut^+(T)$ én dat $\phi(G) \supseteq Aut^+(T)$

$\subseteq$: voor elke $g \in G$ beeldt $\phi^{(g)}$ een lijn (h, hs) af op (gh, ghs). Deze beide lijnen zijn uitgaande lijnen van knopen h of gh respectievelijk. Dus inderdaad $\phi^{(g)} \in Aut^+(T)$

$\supseteq$: zij $\phi \in Aut^+(T)$ een graafautomorfisme dat labels en oriëntatie bewaart, en zij $g = \phi_V(1)$. We bekijken dan "$g^{-1}\phi$", dus eerst ϕ toepassen en dan g^{-1} links laten werken. Dit is wegens "$\subseteq$" een $Aut^+(T)$-automorfisme.

Nu willen we natuurlijk aantonen $g^{-1}\phi = id$. Als volgt: $g^{-1}\phi(1) = 1$, en omdat $Aut^+(T)$ nabuurigheid moet bewaren volgt dat deze werking de buren van 1 permuteert.

Maar deze buren zijn $S^{\pm}$, en omdat $Aut^+(T)$ ook labels bewaart en oriëntatie kan dit alleen als $g^{-1}\phi$ alle $s \in S^{\pm}$ op zichzelf afbeeldt:

- want als $s \mapsto s'$ met $s' \neq s^{\pm}$ dan bewaart $g^{-1}\phi$ geen labels
- en als $s^{-1} \mapsto s$ dan wordt de lijn $(s^{-1}, 1)$ met label s op de lijn $(s, 1)$ met label s afgebeeldt, maar nu is de oriëntatie niet bewaard want eigenlijk is dit de vereiste oriëntatie: $(s^{-1}, 1) \mapsto (1, s)$ maar $1 \mapsto 1$ dus $s^{-1} \mapsto s$ en dit inverteert de oriëntatie, tegenspraak met $g^{-1}\phi \in Aut^{+}(\Gamma)$

$\Rightarrow$ $g^{-1}\phi$ werkt als id op de voortbrengers $S \subseteq G$ maar dat betekent dat $g^{-1}\phi(x)$ op willekeurige $x \in G$ werkt als: $x = s_1^{\pm} s_2^{\pm} \cdots s_n^{\pm}$:
$g^{-1}\phi$ is automorfisme dus we mogen de relator $s_1^{\pm} \cdots s_n^{\pm}$ opknippen: $= g^{-1}\phi(s_1^{\pm}) \cdots g^{-1}\phi(s_n^{\pm})$
$= s_1^{\pm} \cdots s_n^{\pm} = x$

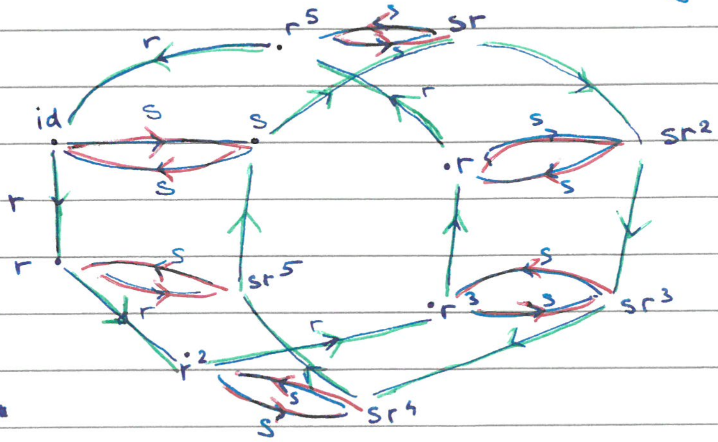
$\Rightarrow$ $g^{-1}\phi$ werkt triviaal op $V(\Gamma)$ dus op Γ

$\Rightarrow$ $\phi = g \cdot$ $\Rightarrow$ $\phi \in \phi(G)$ $\square$

def Een relator van g is een woord van generatoren $s_i^{\pm} \in S$ zodat een circuit van 1 naar 1 in de cayleygraaf langs deze lijnen loopt.

zo'n relator geeft een identiteit voor de voortbrengers S van G

Vbd $\Gamma(D_6, \{s,r\})$:



we weten $s^2 = id$

$rs = s^{-1}r^{-1}$

$r^6 = id$

$\Rightarrow r^n s = r s^{-1} r^{-1}$

$= r^{n-1} s r$

relator : ss , of rrsrrr sr : pad (id, r, r, r, r^2, s, sr^4, sr^5 ..., r, ... s, id)

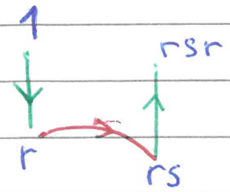
is inderdaad $r^2sr^3sr = r^2ssr^{-3}r$

$= r^2r^{-3}r = 1.$

$\square$ etc.

we zien dat D_6 niet-Abels is:

rsr :



rrs :