3 GROEPACTIES OP BOMEN.

2.9 en 2.12 tonen aan dat vrije groepen precies de groepen zijn, waarvan de Cayley-graaf een boom is.

De cykels in een Cayleygraaf vertellen dus dat de groep niet vrij is. Maar ze vertellen ons nog veel meer.

def Γ samenhangende graaf en $v \in V(\Gamma)$. Een gesloten pad gebaseerd bij v is een gesloten pad in Γ dat begint & eindigt bij v.

Dus van de vorm $p = (v e_1 \cdots e_k v)$. Voor nog zo'n pad $p' = (v e_1' \cdots e_\ell' v)$ krijgen we door concatenatie een nieuw gesloten pad gebaseerd bij v,
$pp' = (v, e_1, \ldots e_k, v, e_1', \ldots, e_\ell', v)$

Net als voor woorden over S maakt dit de paden in v tot monoïde met identiteit (v).

Een lijn in een pad $(\cdots v_k e_{k+1} v_{k+1} \cdots)$ heeft een natuurlijke oriëntatie (v_k, v_{k+1}) en we noteren dan $\bar{e}$ als de omgekeerd georiënteerde lijn, (v_{k+1}, v_k)

Een deelpad van de vorm $v e w \bar{e} v$ heet een backtrack. We beschouwen twee paden als equivalent wanneer insertie/deletie van een eindig aantal backtracks u in elkaar overvoert.

voor een gesl. pad p gebaseerd bij v noemt men zijn equivalentieklasse $[p]$ zijn homotopie- klasse.

De homotopieklasse van (v) bevat bijvoorbeeld $(v e w e' u \bar{e}' w \bar{e} v)$:

we noteren het omgekeerde pad $\bar{p}$ van p:

$$\left.\begin{array}{l} \text{als } p = (v e_1 \dots e_k v) \\ \bar{p} = (v \bar{e}_k \dots \bar{e}_1 v) \end{array}\right\} \text{ en } [\bar{p}p] = [\cdot(v)]$$

merk op dat voor een pad met bekend begin- en eindpunt v, men de tussenliggende punten uniek kan bepalen door de natuurlijke oriëntatie uit te werken:

begint met v, e geassoc. met (v, w), dus tweede knoop is w, etc...

⇒ we kunnen dit soort paden noteren met hun lijnen. Zo (v) "=" $\emptyset$

Een pad heet gereduceerd als het geen backtracks bevat.

St. 2.2 volgt nu bijna direct voor "woorden" uit $E(\Gamma)$ en elke homotopieklasse bevat idd een uniek woord.

⇒ $[p][p'] := [pp']$ welgedef. en maakt dit tot groep

def Dit heet $\pi_1(\Gamma, v)$, de fundamentele groep van Γ gebaseerd bij v.

GROEPACTIES OP BOMEN.

2.4 en 2.12 tonen aan dat vrije groepen precies de groepen zijn, waarvan de Cayley-graaf een boom is.

De cykels in een Cayleygraaf vertellen dus dat de groep niet vrij is. Maar ze vertellen ons nog veel meer.

def Γ samenhangende graaf en $v \in V(\Gamma)$. Een gesloten pad gebaseerd bij v is een gesloten pad in Γ dat begint & eindigt bij v.

Dus van de vorm $p = (v e_1 \cdots e_k v)$. Voor nog zo'n pad $p' = (v e_1' \cdots e_\ell' v)$ krijgen we door concatenatie een nieuw gesloten pad gebaseerd bij v,

$$pp' = (v, e_1, \cdots e_k, v, e_1', \cdots, e_\ell', v)$$

Net als voor woorden over S maakt dit de paden in v tot monoïde met identiteit (v).

Een lijn in een pad $(\cdots v_k e_{k+1} v_{k+1} \cdots)$ heeft een natuurlijke oriëntatie (v_k, v_{k+1}) en we noteren dan $\bar{e}$ als de omgekeerd georiënteerde lijn, (v_{k+1}, v_k)

Een deelpad van de vorm $v e w \bar{e} v$ heet een backtrack. We beschouwen twee paden als equivalent wanneer insertie/deletie van een eindig aantal backtracks ze in elkaar overvoert.

voor een gesl. pad p gebaseerd bij v noemt men zijn equivalentieklasse $[p]$ zijn homotopie-klasse.

De homotopieklasse van (v) bevat bijvoorbeeld $(v e w e' u \bar{e}' w \bar{e} v)$:

we noteren het omgekeerde pad $\bar{p}$ van p:
als $p = (v e_1 \ldots e_k w)$
$\bar{p} = (v \bar{e}_k \ldots \bar{e}_1 v)$ } en $[\bar{p}p] = [\cdot(v)]$

merk op dat voor een pad met bekend begin- en eindpunt v, men de tussenliggende punten uniek kan bepalen door de natuurlijke oriëntatie uit te werken:

begint met v, e geassoc. met (v, w), dus tweede knoop is w, etc ...

$\Rightarrow$ we kunnen dit soort paden noteren met hun lijnen. Zo (v) "=" $\emptyset$

Een pad heet gereduceerd als het geen backtracks bevat.

St. 2.2 volgt nu bijna direct voor "woorden" uit $E(T)$ en elke homotopieklasse bevat idd een uniek woord.

$\Rightarrow$ $[p][p'] := [pp']$ welgedef. en maakt dit tot groep

def Dit heet $\pi_1(T, v)$, de fundamentele groep van T gebaseerd bij v.

Fundamentele groepen zijn een meer algemeen topologisch begrip :

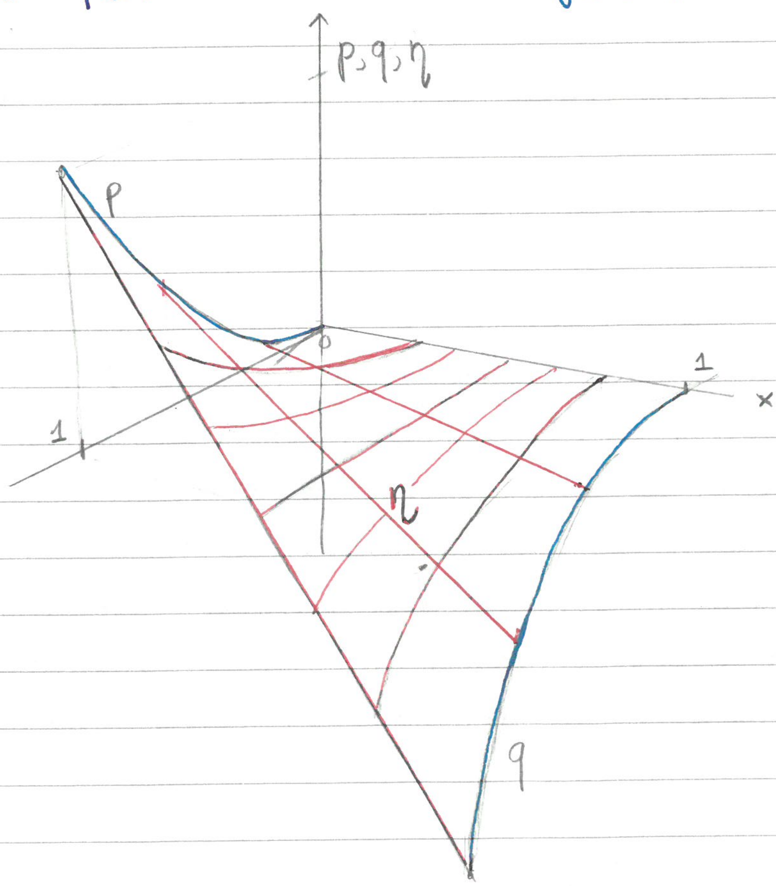
Een pad in een topologische ruimte X is een continue afbeelding $p: [0,1] \to X$

Twee paden p, q heten (wanneer $p(0) = q(0)$ en $p(1) = q(1)$) homotopisch / homotoop (?) als er een continue afbeelding $\eta : [0,1]^2 \to X$ is zodat

$$\eta(0,t) = p(t)$$
$$\eta(1,t) = q(t) \quad \text{voor alle } t \in [0,1]$$

Een "continue deformatie" van p naar q dus

Vbd. $p(t) = t^2$, $q(t) = -t^2$ en $\eta(x,t) = t^2 - 2xt^2$



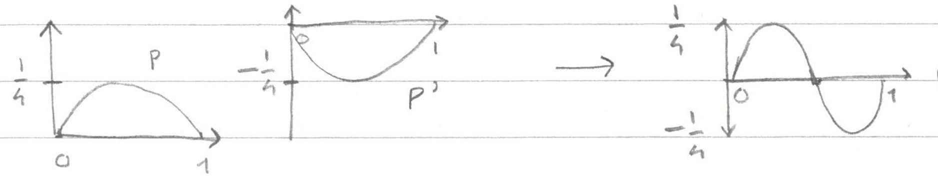
Een gesloten pad gebaseerd in $x \in X$ is een continue $p: [0,1] \to X$ met $p(0) = p(1) = x$
Twee paden gebaseerd in $x \in X$ kunnen tot

één pad $pp' : [0,1] \to X$ als volgt:

$$(pp')(t) := \begin{cases} p(2t) & \text{voor } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ p'(2t-1) & \text{voor } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Vbd $p(t) = t(1-t)$ gebaseerd in $0 \in \mathbb{R}$
$p'(t) = -t(1-t)$ gebaseerd in $0 \in \mathbb{R}$

dan $(pp')(t) = \begin{cases} 2t - 4t^2 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2t - 4t^2 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$



[niet per se differentieerbaar in $\frac{1}{2}$]

twee homotope paden zien we als equivalent en we maken hiervan een groep $\pi_1(X, x)$ fundamentele groep van X gebaseerd in x

def heet ook wel de Poincaré-groep.

— (einde intermezzo)

def Een deelgraaf Λ van een graaf Γ is een graaf met $V(\Lambda) \subseteq V(\Gamma)$ en $E(\Lambda) \subseteq E(\Gamma)$ en de eindpunten van de $e \in E(\Lambda)$ zijn bevat in $V(\Lambda)$

def Voor een samenhangende graaf Γ is een opspannende boom T een deelgraaf van Γ die een boom is en alle knopen van Γ bevat.

St. 3.3 Elke niet-lege samenhangende graaf bevat een opspannende boom.

Bew. Voor (on)eindige bomen kunnen we Zorns lemma doen:

De verzameling $\mathcal{T}$ van deelbomen van Γ is partieel geordend door graaf-inclusie.
Als $\{T_i\}_{i\in I}$ een keten is, dan is $\bigcup_{i\in I} T_i =: \hat{T}$ een deelgraaf van Γ. Aan te tonen is dat $\hat{T}$ een boom is:

Als $\hat{T}$ een cykel bevat, dan is de cykel C per definitie eindig, en dus is er voor elke $v \in V(C)$ een T_v: $V(T_v) \ni v$, en voor elke $e \in E(C)$ een T_e: $E(T_e) \ni e$. Nu is dit een eindige keten, met dus een maximum: dus er is een T_i die heel C bevat als deelgraaf. Maar dan is T_i geen boom, tegenspraak.

$\Rightarrow$ $\hat{T}$ is een boom. Elke keten van deelbomen heeft dus een bovengrens in $\mathcal{T}$.
$\Rightarrow$ Zorns lemma geeft dat er een maximale boom is. T

Maar een maximale boom is opspannend, want als T niet alle knopen bevat, dan kunnen we een $v \notin V(T)$ toevoegen zonder cykel te creëren en is T' strikt groter dan T, tegenspraak!

$\square$

Nu tonen we aan dat $\pi_1(\Gamma, v)$ een vrije groep is en laten een basis zien.

3.4 $\pi(\Gamma, v)$, voor opspannende boom T voor Γ, is een vrije groep met basis $\{[p_e] \mid e \in E(\Gamma), e \notin E(T)\}$

Ihb is voor Γ eindig $\pi_1(\Gamma, v)$ vrij met rang $\#E(\Gamma) - \#V(\Gamma) + 1$.

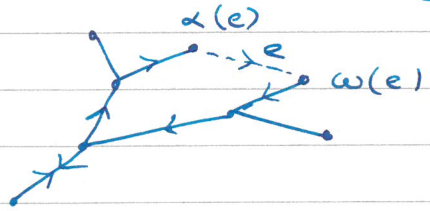
def hierbij is $p_e = p_{\alpha(e)}\, e\, \overline{p_{\omega(e)}}$, de lijncykel die het unieke pad van v naar $\alpha(e)$ door T neemt, dan e, dan vanuit $\omega(e)$ uniek terug naar v.

Bew we gebruiken de karakterisering van vrije groepen uit gevolg 2.10

Aan te tonen is dus dat $S = \{[p_e] \mid e \in E(\Gamma) - E(T)\}$

1) voortbrengt $\pi_1(\Gamma, S)$ én
2) geen gereduceerde woorden >0 gelijk aan $\emptyset$ toelaat.

diagram p_e:



1): Zij p een pad door Γ, wat we noteren als het product/woord van zijn opeenvolgende lijnen (oriëntatie van links naar rechts):

$p = e_1 \cdots e_n$

Dan tonen we aan $[p] = [p_{e_1}] \cdots [p_{e_n}]$ met inductie naar n is het netst:

IB $n = 2$ (>1 n.l.) dan $p = e_1 \overline{e_1} \sim \emptyset$.

anderzijds, $p_{e_1} = p_{\alpha(e_1)}\, e_1\, \overline{p_{\omega(e_1)}}$

$$p_{\overline{e_1}} = p_{\alpha(\overline{e_1})}\, \overline{e_1}\, \overline{p_{\omega(\overline{e_1})}} = p_{\omega(e_1)}\, \overline{e_1}\, \overline{p_{\alpha(e_1)}}$$

zodat $p_{e_1} p_{\overline{e_1}} = p_{\alpha(e_1)}\, e_1\, \overline{p_{\omega(e_1)}}\, p_{\omega(e_1)}\, \overline{e_1}\, \overline{p_{\alpha(e_1)}}$

$$\sim p_{\alpha(e_1)}\, e_1\, \overline{e_1}\, \overline{p_{\alpha(e_1)}}$$

$$\sim p_{\alpha(e_1)}\, \overline{p_{\alpha(e_1)}}$$

$$\sim \emptyset \qquad \Longrightarrow [p] = [p_{e_1}] \cdot [p_{e_2}]$$

IS dan: stel het geldt voor paden van lengte $\leq n$.

Dan zij $p = e_1 \cdots e_{n+1}$ van lengte $n+1$.

er volgt

dat $e_2 \cdots e_n$ een pad van lengte $n-2$

gebaz

32 def Een vrije werking van G op Ω is wanneer
$\forall \omega \in \Omega \quad G_\omega = \{e\}$

In de werking van groep G op graaf Γ bekijken we de werking van G op $V(\Gamma)$ en laten we G werken op $E(\Gamma)$ door ge, $e \in E$, te associëren met $\{gv, gw\}$ als e geassoc. is met $\{v, w\}$, $v, w \in V(\Gamma)$

Hiermee ligt de werking van G op de lijnen $E(\Gamma)$ vast.

Een groep hoeft echter niet vrij te werken op $E(\Gamma)$ als hij vrij werkt op $V(\Gamma)$: immers moet men rekening houden met inversies: $gw = v$ en $gv = w$, dan is $ge = e$, of in het geval van een gerichte graaf is $ge = \bar{e} \sim (w, v)$

def G werkt vrij op een graaf Γ als G vrij werkt op $V(\Gamma)$ en de werking (geïnduceerd hierdoor) op $E(\Gamma)$ geen inversies heeft. $\Leftrightarrow G$ werkt vrij op V en E.

Elke werking van G op graaf Γ geeft een quot. gr:

def De quotiëntengraaf $G \backslash \Gamma$ heeft als knopen de banen $G(v)$ voor $v \in V(\Gamma)$ en als lijnen de banen $G(e)$ voor $e \in E(\Gamma)$, waarbij $G(e)$ de eindpunten $G(v)$, $G(w) \in V(\Gamma)$ verbindt, als e in Γ $\{v, w\}$ is.

— men gaat na dat dit welgedefinieerd is, dwz als e $\{v, w\}$ verbindt en e' verbindt $\{v', w'\}$, dan wanneer $G(e) = G(e')$ dan $ge = e'$ voor een $g \in G$, dus $gv = v'$ $gw = w'$ of $gv = w'$ en $gw = v'$
in beide gevallen zien we $G(v) = G(w') \wedge G(w) = G(v')$ of
$G(v) = G(v') \wedge G(w) = G(w')$ zodat
dit welgedefinieerd is: keuze van e maakt niet uit.

Ga na dat G altijd vrij werkt op $\Gamma(G,S)$
mits er geen $s \in S$ is met $s^2 = 1_G$, dus van orde 2.

3.2 Acties / Werkingen die VRIJ heten..

— transitief : $G(\omega) = \Omega$ voor elke $\omega \in \Omega$, dwz voor alle $\forall \omega \in \Omega \;\; \exists g \in G \quad g\omega = v$

~~bijvoorbeeld~~ bijvoorbeeld : rotatiegroep $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in (0, 2\pi] \right\}$ werkt transitief op eenheidscirkel $S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2+y^2=1 \right\}$

— vrij: (ook wel fixed-point-free) : als er een $\omega \in \Omega$ is met $g\omega = \omega$ dan $g = e_G$. Er is dus geen $\omega \in \Omega$ zodat $g\omega = \omega$ als $g \neq e_G$, oftewel $G_\omega = \{e_G\} \;\forall \omega$.

recall de baan-stabilisatorstelling : voor elke $\omega \in \Omega$ was $G/G_\omega \cong G(\omega)$ door bijectie (geen ismorfie want $G(\omega)$ is geen groep o.i.d.)
$gG_\omega \longmapsto g\omega$.

- welgedefinieerd : $gG_\omega = hG_\omega$ dan $g^{-1}h \in G_\omega$ dus $g^{-1}h \cdot \omega = \omega$ dus $g \cdot \omega = h \cdot \omega$ (werkingsaxioma)
- injectief: $g\cdot\omega = h\cdot\omega \Rightarrow g^{-1}h \in G_\omega$. dus $gG_\omega = hG_\omega$.
- surjectief: per def. van $G(\omega)$: zij $v \in G(\omega)$, dan is er een $h \in G$ met $h\omega = v$ dus met $hG_\omega \mapsto h\omega$.

dus.. vrij $\Longrightarrow$ met $G/G_\omega \cong G(\omega)$ volgt $G \cong G(\omega)$ voor elke ω, en wel door $g \longmapsto g\omega$.

(als G ook nog transitief is, dan $g \mapsto g\omega$: $G \cong \Omega$.)

Een werking van een groep G op een graaf Γ is een werking van G op V en een werking van G op E zodat de incidentie bewaard blijft, i.e. als $\overset{G}{\underset{\cup}{g}}: v \mapsto v'$, $\overset{V}{\cup}$

en v, w zijn verbonden door lijn in E $\qquad w \mapsto w'$

dan moet $g: \{v, w\} \mapsto \{v', w'\}$

aangezien een actie een homom $G \to S_\Omega$ induceert

nl. door $g \mapsto g\cdot()$ (homom, want per werkings axioma's

$g\cdot() \circ h\cdot() = (gh)\cdot()$

$e\cdot() = id_\Omega$ en bovendien $g\cdot() \in S_\Omega$ want

inverse is $g^{-1}\cdot()$.)

en een graafautomorfisme is een paar $\phi_V \in S_V$ $\phi_E \in S_E$

die incidentie-compatibel zijn,

betekent de definitie hierboven precies hetzelfde als:

G werkt op een graaf Γ als G werkt op V en E

én $\forall g \in G$ is $g \in S_V \times S_E$ een graafautomorfisme

(en omdat werkingen zelfs homomorfismen $G \to S_\Omega$

induceren volgt)

$\iff$ het is een homomorfisme

$G \to Aut(\Gamma)$

$\square$

hoop dat dit het verduidelijkt.

def vrij: werking heet vrij als $G_\omega = \{e_G\}$ $\forall \omega \in \Omega$.

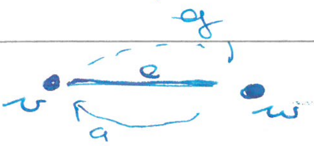
Een graafwerking van G heet vrij als de werkingen op E en V beide vrij zijn

werking op V legt die op E vast :

maar als de werking op V vrij is, kan er nog steeds een fixed point $e \in E$ zijn bij een

$g \in G$ $g \neq 1$. namelijk als g v, w verwisselt

en e correspondeert met $\{v, w\}$:

 Dan $g \in G_e \neq \{1_G\}$ probleem

Je kunt dus zeggen:

G werkt vrij op T $\Longleftrightarrow$ G werkt vrij op V
en zonder "inversies" op E.

3.7

Werkt G bijvoorbeeld altijd vrij op zijn Cayley-graaf?
(we nemen dan $g: h \mapsto gh$ als (kanonieke werking))

— G werkt altijd vrij op $V(T(G,S))$ als $e \notin S$
want $g \in G_v$ $\Longleftrightarrow$ $gv = v$ in G $\Longleftrightarrow$ $g = e_G$
(eenheid in groepen is uniek) [eenheid: tinks-] want we hebben het hier over $v \in G$, $g \in G$ en de werking is "vermenigvuldiging in de groep G"

G werkt zonder inversie van lijnen $\Longleftrightarrow$ er is geen (g, gs) die door een $h \in G$ op (gs, g) wordt afgebeeld $\Longleftrightarrow$ er zijn geen $h, g \in G$, $s \in S$ met
$hg = gs$, $hgs = g$ $\Longleftrightarrow$ $hg = gs$, $hgs^2 = gs = hg$
$\Longleftrightarrow$ er is een $s \in S$ met $s^2 = 1_G$.

dus alleen als er geen voortbrenger van orde 2 is gekozen.

— Wat was $Aut^+(T(G,S))$ ook al weer?
de groep van graafautomorfismen van T die de labels van $e \in E(T)$ en de oriëntatie van $e \in E(T)$ bewaarden, dus een lijn van $(g, gs)_s$ wordt afgebeeld op een lijn $(h, hs)_s$.
En we lieten zien dat $G \hat{=} Aut^+(T(G,S))$

— Als G:
alleen/ook zonder inversie op V werkt dan kan men welgedefinieerd een oriëntatie kiezen op de lijnen van T die door de werking bewaard blijft: hier uit elke
baan "G_e" één e

en geef deze een oriëntatie door $\alpha(e)$ en $\omega(e)$ te zetten. Dan induceert dit op elke $e' \in G_e$ een oriëntatie doordat voor $e' = g \cdot e$ voor een bepaalde $g \in G$, we definiëren
$$\alpha(e') = g \cdot \alpha(e)$$
$$\omega(e') = g \cdot \omega(e)$$
En dit is welgedefiniëerd, want

het enige dat fout kan gaan is dat wanneer $e' = g \cdot e$ en $e' = h \cdot e$, dan moeten we aantonen $g \cdot \alpha(e) = h \cdot \alpha(e)$, maar als dat niet zo is dan $g^{-1}h \cdot \alpha(e) \neq \alpha(e)$ dus omdat een graafwerking incidenties bewaart, $g^{-1}h \cdot \alpha(e) = \omega(e)$ blijkbaar. en evenzo $g^{-1}h \cdot \omega(e) = \alpha(e)$.

Maar dan zien we juist dat $g^{-1}h$ de lijn e inverteert! En we namen juist aan dat dit niet zo was.

$\Rightarrow$ definitie welgedef. en bovendien bewaart G's werking zo de oriëntatie.

3.8 def: Quotiëntgraaf van werking G op T, noteer $G \backslash T$, is de graaf met knopen de banen $G(v)$ van $V(T)$ en lijnen de banen $G(e)$ van $E(T)$

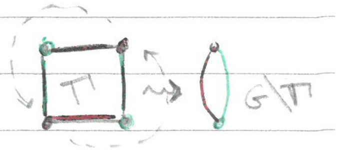
en $G(e)$ verbindt $G(v)$ en $G(w)$ alleen als e v en w verbindt in T.

welgedefiniëerd: neem e, e', v, v', w, w', dan als $\underbrace{e' \in G(e)}_{e = ge'}$, $\underbrace{w' \in G(w)}_{w = hw'}$ $\underbrace{v' \in G(v)}_{v = jv'}$, geldt:

e' verbindt v' en w' in T

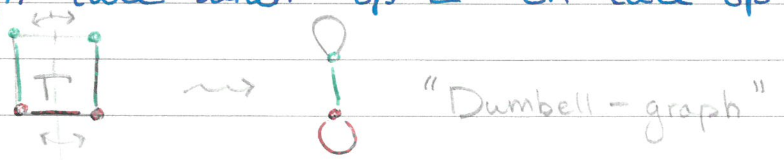
Vbd 3.9 verschillende werkingen op C_4 : We kunnen C_4 opvatten als vierhoek en dus kijken naar (ondergroepen van) D_4 :

$G = \langle r^2 \rangle$ geeft twee banen op de knopen
geeft twee banen op de lijnen.
werkt zonder inversie op E.
bovendien $\langle r^2 \rangle = \{1, r^2\}$ en r^2 verandert alle knopen van plaats, dus dit is een vrije werking op een graaf.

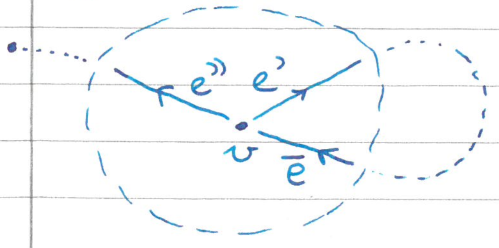


$G = \langle r \rangle$ werkt eveneens vrij, geeft een transitieve werking op zowel knopen als lijnen, dus quotiëntgraaf :

$G = \langle s \rangle$ werkt vrij op de knopen maar inverteert twee lijnen door s. Dus niet een vrije graafw. Er zijn ~~twee~~ drie banen op E en twee op V :

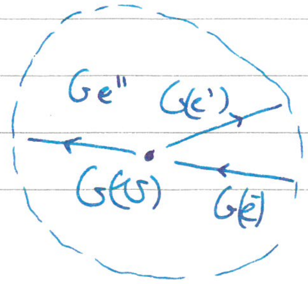


Voor vrije graafwerkingen is de quotiëntgraaf informatief omdat "lokaal" de quot. gr. op de oorspronkelijke lijkt, dwz we kunnen een oriëntatie kiezen op Γ die bewaard blijft onder G in de zin dat de oriëntatie "constant" is op de $G(e)$, en als we de "open ster" rondom een $v \in V(\Gamma)$ beschouwen, dat zijn steeds de verbonden helften van de lijnen uit/in v met hun oriëntatie :



$\sim$

dan is deze bijectief met de open ster van $G(v) \in V(G\backslash\Gamma)$



dit geldt voor vrije werkingen maar niet iha. We zien bijvoorbeeld voor $\langle s\rangle \backslash \Gamma$ dat deze niet lokaal isomorf is met Γ.

3.10 Stelling als G vrij op Γ werkt dan beeldt de canonieke projectie $p : \Gamma \to G\backslash\Gamma$ elke open ster van $v \in V(\Gamma)$ isomorf af op de open ster van $\bar{v} = G(v) \in V(G\backslash\Gamma)$

Bew Het is duidelijk dat p "per def." surjectief is op de open ster. Neem een oriëntatie op E die bewaard wordt onder de werking. Dat kan, want G werkt zonder inversies van de lijnen.
Zij e_1, e_2 aan v verbonden en wel met de oriëntatie $\alpha(e_1) = \alpha(e_2) = v$

Dan moeten e_1 en e_2 in andere banen liggen want $ge_1 = e_2 \Rightarrow g\alpha(e_1) = \alpha(e_2)$ want de oriëntatie blijft behouden $\Rightarrow gv = v$
$\Rightarrow g = e_G$ want G werkt vrij op Γ
dus hieruit volgt dat als e_1 en e_2 verschillende uitgaande lijnen zijn, dat ze dan door p ook op verschillende uitgaande $G(e_1) \neq G(e_2)$ worden afgebeeld. Analoog als $\omega(e_1) = \omega(e_2) = v$

En als $v = \alpha(e_1) = \omega(e_2)$, dan volgt uit $ge_1 = e_2$ dat $g\alpha(e_1) = \alpha(e_2)$ want G's werking bewaart oriëntatie $\Rightarrow g\omega(e_2) = \alpha(e_2)$ dus

ofwel g inverteert e_2 wat niet mag want G werkt vrij, ofwel e_2 is een lus (v,v), maar dan $gv = v$ en daaruit volgt ook $g = e_G$ want G werkt vrij op $V(\Gamma)$