H8 Reeksen

8.1 convergente reeks

def Zij $(a_n)_n$ een rij $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Definieer de partiële som $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ voor alle $N \in \mathbb{N}$. Als de rij $(S_N)_N$ een convergente rij is, dan zegt men "dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert" naar $\lim_{N \to \infty} S_N$

def als de rij $(S_N)_N$ niet convergeert, dan noemt men $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

(opgave) gegeven de rij $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ alleen convergent als er een $m \in \mathbb{N}$ is zodat $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ convergent is, dat is per definitie wanneer $(S_{N+m})_N$ convergeert.

bewijs: $\Rightarrow$ stel er is een $m \in \mathbb{N}$ met $(S_{N+m})_N$ convergent, $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall N \geq M \quad |S_{N+m} - L| < \varepsilon$

dan volgt voor $M' = M + m$, dat

als $N \geq M'$, dan $S_N = S_{N'+m}$ voor $N' \geq M$

dus $|S_N - L| = |S_{N'+m} - L| < \varepsilon$ want $N' \geq M$.

$\Rightarrow (S_N)_N$ is convergent met dezelfde limiet

$\Leftarrow$ neem $m = 0$, dus $\exists m \in \mathbb{N}$ .. $\square$

St. 8.4.1 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergente reeksen, met $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = M$

i. de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ is convergent en is $= cL$ $(c \in \mathbb{R})$

ii. de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ is convergent en is $= L + M$

iii. de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n + db_n)$ is convergent en is $cL + dM$

iv. stel voor alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b_n$, dan $L \leq M$

bew i. dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$ conv. en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = M$ conv. betekent

precies $\lim_{n\to\infty} S_n^a = L$, $\lim_{n\to\infty} S_n^b = M$

voor $S_n^a = \sum_{k=0}^{n} a_n$ $S_n^b = \sum_{k=0}^{n} b_n$

dus dan wegens st. uit H3 geldt ook $\lim_{n\to\infty} (cS_n^a + dS_n^b)$ voor $c, d \in \mathbb{R}$ bestaat en is $cL + dL$. toepassen voor $d = 0$, $c \in \mathbb{R}$ geeft i., $c=1$, $d=1$ geeft ii en $c, d \in \mathbb{R}$ geeft iii.

iv dit betekent dus ihb. voor $n \in \mathbb{N}$ will dat

$$S_{n+1}^a = S_n^a + a_{n+1} \geq S_n^a + b_{n+1} \underset{IH}{\geq} S_n^b + b_{n+1} = S_{n+1}^b$$

met inductie: IB: $S_0^a = a_0 \geq b_0 = S_0^b$ en uit IH volgt het voor $n+1$, zie bovenstaande.

maar dan is bewezen $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n^a \geq S_n^b$, en wegens St. uit h.3 volgt dan voor de limieten ook $\lim_{n\to\infty} S_n^a \geq \lim_{n\to\infty} S_n^b$ dus precies $L \geq M$

$\square$

Prop. (Telescoperende reeks) Zij $(a_n)_n$ een rij. Dan is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ convergent desda $(a_n)_n$ dat is en dan is $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = -(\lim_{n\to\infty} a_n) + a_0$

bew partiële som is $S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$

dus $\lim_{n\to\infty} S_n$ bestaat alleen als $\lim_{n\to\infty} (a_0 - a_{n+1})$ bestaat, alleen als $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ bestaat want we kunnen de conv. rij (a_0) ervan af halen en de -1 vlnr en vrnl buiten limiet zetten, en dit is alleen als $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaan. Bovendien volgt wanneer $\lim_{n\to\infty} S_n$ bestaat dat wegens somregel limieten dus gelijk is aan $a_0 - \lim_{n\to\infty} a_n$ $\square$

St. 8.1.7 Als reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert, dan is (a_n) convergent en $a_n \to 0$ als $n \to 0$

bew we weten $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ is convergent, dus ook $(S_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ is convergent met gelijke limiet: $\lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = 0$ dus. Maar $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ dus $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$ dus ook $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ conv. met $a_n \to 0$ als $n \to \infty$. $\square$

Gevolg: als (a_n) divergent is of convergent, maar $a_n \to L \neq 0$ als $n \to \infty$, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

— nu een criterium met Cauchy-rijen:

St. 8.1.9 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv. <u>alleen als</u> ($\Longleftrightarrow$)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > m \geq N \quad \left| \sum_{j=m+1}^{n} a_j \right| < \varepsilon$

bew $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ conv $\Leftrightarrow$ $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ cauchy-rij (in $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N \quad |S_n - S_m| < \varepsilon$

en $n < m$: $|S_n - S_m| = |S_m - S_n|$

neem zvva $n > m$, aangezien $n = m$ geeft $|S_n - S_n| = 0 < \varepsilon$ triviaal, en dan vinden we $|S_n - S_m| = \left| \sum_{j=0}^{n} a_j - \sum_{j=0}^{m} a_j \right| = \left| \sum_{j=m+1}^{n} a_j \right| < \varepsilon$

$\square$

═ Absolute convergentie:

def de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heet absoluut convergent als $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergent is

Prop (Abs conv $\Rightarrow$ conv) Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut conv. is, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent en

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

(beide bestaan)

bew Voor de eindige sommen $m \geq n \geq 0$ geldt $\left| \sum_{i=n}^{m} a_i \right| \leq \sum_{i=n}^{m} |a_i|$ wegens inductie op de driehoeksongelijkheid.
Omdat $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergent is, volgt

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > m \geq N \quad \left| \sum_{i=m+1}^{n} |a_i| \right| < \varepsilon$, maar links staat hetzelfde als:

$$\sum_{i=m+1}^{n} |a_i| < \varepsilon .$$

dus neem nu $\varepsilon > 0$ willekeurig dan voor dezelfde N geldt
$\left| \sum_{i=m+1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=m+1}^{n} |a_i| < \varepsilon$ dus hiermee is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent. Vervolgens zij $S_n = \sum_{m=0}^{n} a_m$, $T_n = \sum_{m=0}^{n} |a_m|$

dan volgt wederom $|S_n| \leq T_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ voor eindige sommen, en $\lim_{n \to \infty} |S_n|$ bestaat want $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continu en dus $\left| \lim_{n \to \infty} S_n \right| = \lim_{n \to \infty} |S_n| \leq \lim_{n \to \infty} T_n$ wegens $|S_n| \leq T_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ☒

def $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heet relatief of voorwaardelijk convergent als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is en niet absoluut convergent

St. 8.1.14 (Monotone begrensde sommen)

Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $\forall n \ a_n \geq 0$ en zij $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ de zij partiële sommen. TFAE:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert

2. $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ is begrensd

en wanneer 1 & 2 gelden, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup_{N \in \mathbb{N}} S_N$

bewijs aangezien $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ geldt $S_{N+1} \geq S_N$ $\forall N \in \mathbb{N}$ dus $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ is een stijgende rij

2. $\Rightarrow$ 1. begrensde, stijgende rijen zijn convergent en wel naar hun supremum $\sup_{N \in \mathbb{N}} S_N$. Dit is St. 3.2.9

1. $\Rightarrow$ 2. als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv. dan is per definitie $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ convergent en conv. rijen zijn bgd.

$\square$

Stelling 8.1.14 zorgt voor een karakterisering van relatief convergente reeksen. Relatief convergente reeksen blijken precies de reeksen waar je "alles kunt laten uitkomen" door termen te verwisselen.

Prop. 8.1.15 Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ rij en zij voor $n \in \mathbb{N}$, $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$ en $a_n^- = -\min\{a_n, 0\}$ zodat $a_n^-, a_n^+ \geq 0$ en $a_n = a_n^+ - a_n^-$ $\forall n \in \mathbb{N}$, en $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

$\Rightarrow$ Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ relatief conv. is dan zijn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ én $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ beide divergent.

$\Leftarrow$ Andersom, als $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent is maar ofwel $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+$ ofwel $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^-$ (of beide) is divergent, dan kan $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ niet absoluut convergent zijn!

Bew "$\Leftarrow$" $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ - b_n^-$ is convergent dus als een van $\sum b_n^+$ of $\sum b_n^-$ divergent is dan is $\sum b_n^+ = \sum((b_n^+ - b_n^-) + b_n^-)$ of anders $\sum b_n^- = \sum(-(b_n^+ - b_n^-) + b_n^+)$ dat ook beide wel / beide niet. Dus $\sum(b_n^+ - b_n^-)$ is conv maar nu te bewijzen $\sum b_n^+ + b_n^-$ niet. Eenvoudig: zo wel, dan is $\sum b_n^+ = \sum \frac{1}{2}(b_n^+ + b_n^-) + \frac{1}{2}(b_n^+ - b_n^-)$ het ook, tegenspraak want uit voorgaande blijkt dat zowel $\sum b_n^+$ als $\sum b_n^-$ div. zijn. dat bewijst "$\Leftarrow$"

"$\Rightarrow$" stel $\sum a_n$ is convergent maar $\sum |a_n|$ niet.
dus $\sum(a_n^+ - a_n^-)$ is convergent maar $\sum(a_n^+ + a_n^-)$ niet

Als $\sum a_n^+$ conv. zou zijn, dan zou $\sum(2a_n^+ - \underline{(a_n^+ - a_n^-)})$ conv. zijn maar dat is $\sum(a_n^+ + a_n^-) = \sum |a_n|$ ↑c ↑c
tegenspraak. Dus $\sum a_n^+$ is divergent.
Als $\sum a_n^-$ conv. zou zijn, dan zou $\sum((a_n^+ - a_n^-) + 2a_n^-)$ conv. zijn maar dan is $\sum(a_n^+ + a_n^-) = \sum |a_n|$ conv, tegenspraak $\square$

— opgave 8.7.6 vraagt om te laten zien dat relatief convergente reeksen andere limieten krijgen door herschikken van hun termen.

De volgende stelling laat zien dat absoluut convergente reeksen hier geen last van hebben:

St. 8.1.17 (Invariantie van abs. conv. reeksen onder herschikking)

Zij $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut conv. reeks. Zij $J: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een bijectie. Dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_{J(n)}$ absoluut convergent én

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{J(n)}$$

— Het bewijs doet eerst het speciale geval $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0$ en laat daarna zien dat het algemene geval hierop teruggebracht kan worden.

<u>neem aan</u> $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0$. Zij $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ partiëlesom, dan is $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ bgd door, zeg $M \geq 0$, wij nemen $M = \sup_{N \in \mathbb{N}} S_N$

Aangezien (S_N) stijgend is omdat $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, volgt dat $\sum_{k=0}^{K} a_{\tau(k)} \leq \sum_{n=0}^{N} a_n$ met $N = \max_{k\in\{0,..K\}} \tau(k)$

gezien $\tau(\{1,..K\}) \subseteq \{1,..,N\}$ en alle termen $a_1,.. a_N \geq 0$ dus een deelsom is altijd kleiner.

maar ook, $\sum_{n=0}^{N} a_n \leq M \Rightarrow$ voor elke $K\in\mathbb{N}$, neem $N = \max_{k\in\{1,..K\}} \tau(k)$ dan $\sum_{k=0}^{K} a_{\tau(k)} \leq \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M$

dus voor partiële som $T_K = \sum_{k=0}^{K} a_{\tau(k)}$ geldt $\forall K\in\mathbb{N}$ $T_K \leq M$ $\Rightarrow$ omdat ook $(T_K)_{K=0}^{\infty}$ stijgend is omdat $a_{\tau(k)} \geq 0$ $\forall k\in\mathbb{N}$, volgt T_K monotoon stijgend en van boven bgd $\Rightarrow$ T_K convergent.

maar is de limiet hetzelfde? hmm..

$$\lim_{K\to\infty} T_K \leq M = \sup_{N\in\mathbb{N}} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

dus $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Maar we kunnen $\tau^{-1}: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ook gebruiken: definieer $b_k := a_{\tau(k)}$, dan voor $P = \sup_{N\in\mathbb{N}} T_N$ ($= \lim_{K\to\infty} T_K$) geldt:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{K} b_{\tau^{-1}(k)}}_{} \leq \sum_{k=0}^{N} b_k \leq P \quad \text{voor } N = \max_{k\in\{1..K\}} \tau^{-1}(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{K} a_k \qquad \text{dus } M = \lim_{K\to\infty} S_K \leq P = \lim_{K\to\infty} T_K \leq M$$

$\Rightarrow$ $M = P$ en dus $\sum_{n=0}^{\infty} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(k)}$

ALGEMEEN: neem nu niet meer $a_n \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Schrijf $a_n = a_n^+ - a_n^-$ en dus $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$
$a_n^+, a_n^- \geq 0$

dan $\sum_{n=0}^{N} a_n^+ \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \leq \sup_N |S_N|$, evenzo $\sum_{n=0}^{N} a_n^- \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \leq \sup_N |S_N|$

$\Rightarrow$ $S_N^+ = \sum_{n=0}^{N} a_n^+$ is stijg. bgd dus conv. en evenzo voor S_N^-.

$\Rightarrow$ speciale geval: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}^+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}^- = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$

en dan met stelling 8.1.4 : beide conv. wegens voorgaande

spec. geval

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a^+_{\tau(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} a^-_{\tau(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a^+_n - \sum_{n=0}^{\infty} a^-_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

en we zien hetzelfde gebeuren voor $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\tau(n)}| = \ldots + \ldots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

$\boxtimes$

De volgende paragraaf specificeert convergentie – criteria voor reeksen $\boxtimes$

8.2 Convergentie-criteria

— in 8.1 zagen we al enkele criteria

8.1.6 telescoperende reeks : mits $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat

8.1.7 conv. $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

8.1.9 conv. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>m\geq N\ \left|\sum_{j=m+1}^{n} a_j\right| < \varepsilon$

8.1.12 abs. conv $\Rightarrow$ conv.

8.1.14 $\forall n\ a_n \geq 0$, dan conv. $\Leftrightarrow$ abs conv $\Leftrightarrow$ (S_N) bgd.

met $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} S_N$

— nu:

8.2.1 (Alternerende reekscriterium van Leibniz)

Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dalende rij en $a_n \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Dan conv. de alternerende reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ alleen als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

bew $\Rightarrow$: als $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ convergeert, dan volgt $\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n = 0$

aangezien $|\cdot| : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continu is en $a_n = |(-1)^n a_n|$ volgt dat ook $(a_n) = (|(-1)^n (a_n)|)$ convergeert en wel naar

$\lim_{n\to\infty} a_n = |\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n| = |0| = 0$

$\Leftarrow$ stel $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Bekijk dan de deelrijen

$(S_{2K})_{K=0}^{\infty}$ en $(S_{2K+1})_{K=0}^{\infty}$ van $(S_N)_{N=0}^{\infty}$. Voor elke $K\in\mathbb{N}$ geldt dan: $S_{2(K+1)+1} = S_{2K+1} + \underbrace{a_{2K} - a_{2K+2}}_{\geq 0} \geq S_{2K+1}$

en $S_{2(K+1)} = S_{2K} \overbrace{- a_{2K+1} + a_{2K+2}}^{\leq 0} \leq S_{2K}$

dus $(S_{2K})_{K=0}^{\infty}$ is dalend en $(S_{2K+1})_{K=0}^{\infty}$ is stijgend

Bovendien geldt voor elke $K\in\mathbb{N}$:

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \ldots \leq S_{2K+1} = S_{2K} - a_{2K+1} \leq S_{2K} \leq \ldots \leq S_2 \leq S_0$$

(dit geldt ook voor $K=0$: $S_1 \leq S_0$) formeel: met inductie naar $K \geq 0$

dus $(S_{2K})_{K\in\mathbb{N}}$ is een dalende, (door S_1) van beneden begrensde rij en daarmee convergent naar, zeg $L = \lim_{K\to\infty} S_{2K} = \inf_{K\in\mathbb{N}} S_{2K}$.

Hetzelfde voor stijgende van boven bgde rij $(S_{2K+1})_{K=0}^{\infty}$, die convergeert naar, zeg $M = \lim_{K\to\infty} S_{2K+1} = \sup_{K\in\mathbb{N}} S_{2K+1}$

nu geldt dus ook dat $(S_{2K+1} - S_{2K})_{K=0}^{\infty}$ conv. is met limiet $M-L$. maar $S_{2K+1} - S_{2K} = -a_{2K+1}$, dus $\lim_{n\to\infty} -a_{2n+1} = M-L$, dus omdat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en $(a_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ deelrij van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ volgt $0 = M-L$
dus $M = L$

We hebben dus een $L \in \mathbb{R}$ met $\lim_{K\to\infty} S_{2K} = L = \lim_{K\to\infty} S_{2K+1}$
Is dit voldoende om $\lim_{K\to\infty} S_K = L$ te hebben?

Ja, want ("elk getal is even of oneven"): er staat nu
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_1\ |S_{2n+1} - L| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_2\ |S_{2n} - L| < \varepsilon$.

neem $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan vinden we N_1, N_2 zoals hierboven. Zij nu $N = \max\{2N_1+1, 2N_2\}$

Als $n \geq N$, dan is ten eerste 1. $n = 2m+1$ of 2. $n = 2m$ voor een $m \in \mathbb{N}$.

1. dan $2m+1 \geq 2N_1 + 1$ dus $m \geq N_1$ dus
$|S_n - L| = |S_{2m+1} - L| < \varepsilon$
2. dan $2m \geq 2N_2$ dus $m \geq N_2$ dus
$|S_n - L| = |S_{2m} - L| < \varepsilon$

Dus voor $n \geq N$ willekeurig is $|S_n - L| < \varepsilon$, waarmee bewezen is

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |S_n - L| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\lim_{N\to\infty} S_N = L$ dus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv. naar L

en uit het bewijs volgt zelfs expliciet dat
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \inf_{K \in \mathbb{N}} S_{2K} = \sup_{K \in \mathbb{N}} S_{2K+1}$ $\boxtimes$

De andere convergentie-criteria houden zich bezig met reeksen met alleen positieve termen, dus gaan in essentie alleen over absolute convergentie omdat $|a_n| = a_n$ dan.

8.2.3 (Majorisatie-criterium) Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ rijen met $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq a_n \leq b_n$. Dan:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent
2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent

we zeggen dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ majoriseert en dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ " minoriseert.

bew $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, $T_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$. Dan zien we met inductie naar N (IB) $S_0 = a_0 \leq b_0 = T_0$ en (IS)
$S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \leq S_N + b_{N+1} \underset{(IH)}{\leq} T_N + b_{N+1} = T_{N+1}$
$\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}$ $S_N \leq T_N$

Bovendien zijn $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ en $(T_N)_{N=0}^{\infty}$ beide stijgend.
Omdat $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent is, volgt dat $(T_N)_{N=0}^{\infty}$ bgd is wegens $\Leftarrow$ uit 8.1.14 en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sup_{N \in \mathbb{N}} T_N$

$\Rightarrow$ voor alle $N \in \mathbb{N}$ $S_N \leq T_N \leq \sup_{K \in \mathbb{N}} T_K$ dus S_N is stijgend en bgd dus wegens 8.1.14 $\Rightarrow$ volgt dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is.

2. is de modus tollens (contrapositie) van 1. $\square$

8.2.4 (Cauchy) Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een dalende positief ($a_n \geq 0$) rij. Dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ een convergente reeks alleen als $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ een convergente reeks is.

Vbd toepassing op de reeks $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ convergent alleen als de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n+1)^\alpha}$ convergent is.

als $0 < \alpha \leq 1$ dan zien we $\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{(2^k+1)^\alpha} = \infty$ (opgave) zodat de reeks niet conv. wegens 8.1.7

als $\alpha > 1$ dan zien we dat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n+1)^\alpha}$ gemajoriseert wordt door $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^n$ de geometrische reeks met limiet $\frac{1}{1-\frac{1}{2^\alpha}}$ dus convergent is. Conclusie is dat $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}$ conv. desda $\alpha > 1$. $\alpha = 1$ heet de harmonische reeks, welke bekend divergent is.

(Opgave: het bewijs) Zij de partiële sommen

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \quad , \quad T_K = \sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k}$$

1. We laten zien $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$: $2^{k-1} a_{2^{k-1}} \geq a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \dots + a_{2^k} \geq 2^{k-1} a_{2^k}$

bewijs: met inductie naar $k \geq 1$

IB "$k=1$": $a_1 \geq a_2 \geq a_2$ klopt omdat (a_k) dalend is

IS "$k \geq 1 \Rightarrow k+1$": $2^{(k+1)-1} a_{2^{(k+1)-1}} = 2^k a_{2^k}$

St. (Wortelkenmerk van Cauchy (alweer))

Neem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en definieer $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

en zij $\alpha = \infty$ als $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n=0}^{\infty}$ onbegrensd wordt naar ∞. Dan geldt:

1. $\alpha > 1$ dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent

2. $\alpha < 1$ dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent

Bew 1. zij $1 < \alpha < \infty$: kies $\varepsilon > 0$ met $\alpha - \varepsilon > 1$.

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_N \sup_{n \geq N} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$

dus voor $1 < \alpha - \varepsilon < \alpha$ is $\forall N \in \mathbb{N}$ $\sup_{n\geq N} \sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon$

dus $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq N$ $\sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon > 1$

$\Rightarrow$ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq N$ $|a_n| > (\alpha - \varepsilon)^n > 1$

dus $|a_n|$ convergeert niet naar 0, dus a_n ook niet, terwijl als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv. dan $a_n \to 0$ als $n \to \infty$ dus tegenspraak.

2. $0 \leq \alpha < 1$. Kies dan $\varepsilon > 0$ zodat $\alpha + \varepsilon < 1$

Dan $\inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq N} \sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \varepsilon$, dus

$\exists N \in \mathbb{N}$ $\sup_{n \geq N} \sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \varepsilon$ dus

$\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $\sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \varepsilon < 1$

$\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $|a_n| < (\alpha + \varepsilon)^n$

Vanaf N wordt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ dus gemajoreerd door $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ met $b_n = (\alpha+\varepsilon)^n$, meetkundige term $|\alpha + \varepsilon| < 1$

dus omdat $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ convergeert, zo $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ ook en alleen staartgedrag bepaalt convergentiegedrag.

$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergeert ook.

Tenslotte het Quotiëntencriterium (d'Alembert):

Maar eerst opgave: $\alpha = +\infty$

(Opgave) bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent is als $\alpha = +\infty$

Bewijs: stel " $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ "
dat betekent dat (per definitie van deze notatie) $\left(\sup_{n \geq N} \sqrt[n]{|a_n|}\right)_{N=0}^{\infty}$ niet goed gedefiniëerd kan worden omdat $\sqrt[n]{|a_n|}$ onbegrensd is.
Dus $\forall L \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \sqrt[n]{|a_n|} > L$
Dan weten we bijvoorbeeld voor $L = 1$ dat $\exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_1\ |a_n| > L^n = 1$

Dus kan a_n niet naar 0 convergeren, want dan volgt juist $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n| < \varepsilon$ en we zien dat voor $\varepsilon \leq 1$ zo'n N al niet kan bestaan. Dus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is divergent, want als hij convergent is, dan $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\square$

Quotiëntcriterium van d'Alembert

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ reeks en $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \neq 0$ (anders kun je bijv. de eerste x termen verwijderen)

Dan:

1. als $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ abs. conv.
2. als $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent

Bew 1. neem $L = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$

Dan neem $\varepsilon > 0$ zodat $L < L + \varepsilon < 1$. Dan

$\inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{n \geq N} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L + \varepsilon$, noem $L + \varepsilon = r$, dan

$\exists N \in \mathbb{N}$ $\sup_{n\geq N} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r$ dus

$\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r$ met $0 < r < 1$

Met inductie$^{n \geq N}$ volgt dan dat voor die N, r geldt

$\forall n \geq N$ $|a_n| \leq |a_N| r^{n-N}$

voor $n = N$: $|a_n| = |a_n| \cdot r^0 \leq |a_n| r^0$

voor $n+1$: $|a_{n+1}| / |a_n| \leq r$ dus $|a_{n+1}| \leq |a_n| r$

$= |a_N| r^{n-N} \cdot r = |a_N| r^{(n+1)-N}$ $\square$

dus vanaf N wordt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gemajoriseerd door $\sum_{n=0}^{\infty} |a_N| r^{N-n}$, welke convergeert omdat $\sum_{n=0}^{\infty} r^{N-n}$ convergeert (meetkundige reeks, $|r| < 1$) en dus ook de reeks verkregen door schaling met $|a_N|$. Alleen staartgedrag is van belang voor convergentie $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert.

2. Stel $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, dan staat er dus

$\sup_{N\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq N} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ zij dan, voor $L = \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

en $\infty > L > 1$, $L-\varepsilon > 1$ met $\varepsilon > 0$. Dan volgt
$\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > L-\varepsilon > 1$. noem $L-\varepsilon = r$, dan

zien we voor $n\geq N$ dat $|a_n| \geq |a_N| r^{n-N}$
met hetzelfde inductie-argument. Bovendien
divergeert $\sum_{n=0}^{\infty} |a_N| r^{n-N}$ omdat $\lim_{n\to\infty} r^{n-N} = \infty$
gezien $r > 1$ (dit bewijs is eenvoudig)
(kies namelijk, als $(r^n)_{n=0}^{\infty}$ bgd zou zijn, een supremum
M, dan $M/r < M$ dus $r^N > M/r$ voor een $N\in\mathbb{N}$
dus dan zien we $r^{N+1} > M$ tegenspraak).

Dus de staart $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ majoriseert divergente
reeks $\sum_{n=N}^{\infty} |a_N| r^{n-N}$ dus divergeert.

Maar eigenlijk wilden we aantonen dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeert.
Hoe te doen? $|a_n| \geq |a_N| r^{n-N}$ voor $n\geq N$
Dus kan $a_n \not\to 0$ als $n\to\infty$, immers dan
$\forall \varepsilon>0\ \exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N_2 \quad |a_n| < \varepsilon$ maar dan
$\forall \varepsilon > 0 \quad n \geq \max\{N, N_2\} \quad |a_N| r^{n-N} < \varepsilon$ dus zou
$r^{n-N} \to 0$ als $n\to\infty$, maar we zien juist
dat $(r^n)_{n=N}^{\infty}$ onbegrensd is tegenspraak

$\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ is niet 0 (als het al bestaat)
dus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeert

$\square$