H7 De Riemann - Integraal

7.1 Def voor $I \subset \mathbb{R}$ een bgd. interval, i.e. (a,b) $[a,b)$ $(a,b]$ of $[a,b]$ met $a,b \in \mathbb{R}$, niet noodzakelijk $a \leq b$ (indien $a > b$ is $I = \emptyset$) definiëren we de lengte $|I| = 0$ als $I = \emptyset$ en anders $|I| = b - a = \sup_{x \in I} x - \inf_{x \in I} x$

Def Een partitie $\mathcal{P}$ van een bgd interval I is een eindige collectie deelintervallen van I zodat $\forall x \in I \; \exists! J \in \mathcal{P} \; x \in J$

Vbd $I = [0,1]$, $\mathcal{P} = \{[0,0], (0,\frac{1}{2}), [\frac{1}{2},1]\}$ ihb $\forall J, J' \in \mathcal{P}$ $J \neq J' \Leftrightarrow J \cap J' = \emptyset$

Prop 7.1.3 Zij I bgd. interval en $\mathcal{P}$ partitie van I, dan $|I| = \sum_{J \in \mathcal{P}} |J|$ (de volgorde maakt niet uit want voor eindige sommen is dit wegens ass. en comm. van + altijd hetzelfde)

Bew (Opgave): met inductie naar $|\mathcal{P}| \in \mathbb{N}_1$

IB: Als $|\mathcal{P}| = 1$ dan bevat $\mathcal{P}$ maar één intval, zeg J, en En als $x \in I$ dan $x \in J$ noodzakelijk dus $I \subset J$. Anderzijds $\forall J \in \mathcal{P}$ $J \subset I$, dus volgt $J = I$ en hiermee is dan: $\sum_{J \in \mathcal{P}} |J| = \sum_{J \in \{I\}} |J| = |I|$ wat te bewijzen was.

IH Stel voor 'n $|\mathcal{P}| = n \in \mathbb{N}_1$ geldt $\sum_{J \in \mathcal{P}} |J| = |I|$ voor al die $\mathcal{P}$.

IS Zij $J_0 \in \mathcal{P}$ het unieke interval met $x_0 \in J_0$ voor een $x_0 \in I$
Zij $I' = I - J_0$, en $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \{J_0\}$. Dan $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$. Er geldt dat elke $J \in \mathcal{P}'$ een deelinterval is van I' want neem $J \in \mathcal{P}'$ en $x \in J$ dan $x \notin J_0$ dus $x \in I$, $x \notin J_0$, dus $J \subset I'$, voor elke $J \in \mathcal{P}'$. Bovendien als $x \in I'$ dan $x \in J \in \mathcal{P}$ voor een unieke J maar $J \neq J_0$ want $x \in I' = I - J_0$. Dus $x \in J$ voor een unieke $J \in \mathcal{P}'$. Dus $\mathcal{P}'$ is een partitie van I' in n delen, en wegens IH volgt $\sum_{J \in \mathcal{P}'} |J| = |I'|$
Nu passen we, wanneer $n \geq 2$, toe dat IH ook geldt voor $\{J_0, I'\}$ als partitie van I (een partitie omdat $J_0 \subset I$, $I' \subset I$ en als $x \in I$ dan $x \in J_0$ en dus $x \notin I'$ of $x \notin J_0$ dus $x \in I'$)

en dit geeft $|I| = \sum_{J \in \{J_0, I'\}} |J| = |I'| + |J_0| = \sum_{J \in P'} |J| + |J_0|$

$= \sum_{J \in P' \cup \{J_0\}} |J| = \sum_{J \in P} |J|$ waarmee IS is voltooid

Als $n = 1$ dan lossen we dit op met: neem sup, inf:

$|I| = \sup_{x \in I} x - \inf_{x \in I} x = e_I - b_I$

en zij $e_{I'} = \sup_{x \in I'} x$ $b_{I'} = \sup_{x \in I'} x$ $e_{J_0} = \sup_{x \in J_0} x$ $b_{J_0} = \inf_{x \in J_0} x$

We nemen hier aan dat alle beide intervallen I, I' en J_0 niet leeg zijn. Anders zien we al $|I| = |I| + 0 = |I| + |\emptyset| = |I'| + |\emptyset|$
dus we kunnen aannemen dat er een $y_0 \in I'$ is.
Als $y_0 < x_0$ (niet gelijk, dan is $\{I', J_0\}$ geen partitie)
dan $\sup J_0 \geq x_0 > y_0$ maar dit moet zo zijn voor alle $y_0 \in I'$
want anders is er een $y' \in J_0$ met $y_0 < x_0 < y'$
en dan $x_0 \in I'$ én $x_0 \in J_0$ $\perp$ want partitie
evenzo moet dus volgen $\sup J_0 \geq \inf I'$ en dan bewijzen we in nog wat meer stappen dat $|I| = |J_0| + |I'|$
en zijn we klaar.

$\square$

Def voor I een bgd interval en P, Q partities van I noemen we Q fijner dan P of P grover dan Q, notatie $Q \prec P$, als geldt $\forall J \in Q \; \exists K \in P \; J \subset K$

Opm De $K \in P$ met $\emptyset \neq J \subset K$ is uniek, immers er is een $x \in J$ en deze zit in een unieke K, dus als $J \subset K$, $J \subset K'$ dan $x \in K$, $x \in K'$ en dus $K = K'$

Def Voor P, Q partities van bgd interval definiëren we
$P \# Q = \{ J \cap K : J \in P, K \in Q \}$
de gemeenschappelijke verfijning van P en Q.

Prop $P \# Q$ is een partitie van I en $P \# Q \prec P$, $P \# Q \prec Q$ en als R partitie is van I en $R \prec P$, $R \prec Q$, dan $R \prec P \# Q$ ($P \# Q$ is de grofste gemeensch. verfijning)

Bew Neem $B \in \mathcal{P}\#\mathcal{Q}$ dan is $B = J \cap K$ voor $J \in \mathcal{P}, K \in \mathcal{Q}$ dus $B \subset J \in \mathcal{P}$, $B \subset K \in \mathcal{Q}$, $\exists J \exists K$.
Als $x \in I$ dan zijn er $J, \in \mathcal{P}$ met $J \ni x$ en $x \in K \in \mathcal{Q}$ dus $x \in J \cap K \in \mathcal{P}\#\mathcal{Q}$ en deze is uniek want als ook $x \in B = J' \cap K'$ dan $x \in J' \in \mathcal{P}$ dus $J = J'$ en $x \in K' \in \mathcal{Q}$ dus $K = K'$ en $B = J \cap K$.

Zij $\mathcal{R} < \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ een partitie van I. Dan volgt:
$\forall B \in \mathcal{R}$ $\left.\begin{matrix} \exists J \in \mathcal{P} & B \subset J \\ \exists K \in \mathcal{Q} & B \subset K \end{matrix}\right\}$ dus voor $J \cap K \in \mathcal{P}\#\mathcal{Q}$ volgt $B \subset J \cap K \in \mathcal{P}\#\mathcal{Q}$
voor alle want will $B \in \mathcal{R}$. Dus $\mathcal{R} < \mathcal{P}\#\mathcal{Q}$ $\square$

Def I bgd intv., $f: I \to \mathbb{R}$ heet <u>stuksgewijs constant</u>, pc, als Er een functie $c: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ op een partitie $\mathcal{P}$ van I is met $\forall x \in I$ $f(x) = c(J)$ voor J de unieke $J \in \mathcal{P}$ met $x \in J$.

Def $PC(I) := \{ f: I \to \mathbb{R} \;:\; f \text{ is pc} \}$

Opm $PC(I)$ is een <u>reële vectorruimte</u> (opgave uit HW, zie bijlage! <u>week 8</u>)

Omdat $PC(I) \subset \{ f: I \to \mathbb{R} \}$ en die laatste is al een vectorruimte met $+$: $f+g: I \to \mathbb{R}$ als $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ voor $x \in I$ en $\cdot$: door $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in PC(I)$, dan $\alpha f: I \to \mathbb{R}$ door $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ ligt weer in $PC(I)$

Dit is een huiswerkopgave uit Wk 8 welke ik later hieraan zal toevoegen. Maar het bewijs is meer bureaucratisch dan moeilijk.

— Interessant is wel dat wanneer f pc is t.o.v een partitie $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$ is fijner, dan kunnen we f ook als pc t.o.v. $\mathcal{Q}$ zien, met andere woorden als $c: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ en $f(x) = c(J)$ voor $x \in J \in \mathcal{P}$, J uniek,

dan kunnen we $d: Q \to \mathbb{R}$ definiëren door $d(\emptyset) = c(\emptyset)$ indien $\emptyset \in Q$
$d(K) = c(J)$ als $\emptyset \neq K \subset J$. Dit is welgedefinieerd omdat er maar één $\emptyset \in Q$ kan zijn als er al een is, en als $K \neq \emptyset$ dan is er een $x_0 \in K$ en deze x_0 kan maar in één $J \in P$ zitten dus J met $K \subset J$ is uniek bepaald en daarmee is $d(K)$ uniek bepaald dus d een functie.

Bovendien voor $x \in I$ is $x \in J$ voor een $J \in P$ en $x \in K$ voor een $K \in Q$ met noodzakelijk $K \subset J$ omdat $K \cap J \neq \emptyset$ dus als $K \not\subset J$ maar $K \subset J' \neq J$ dan $K \cap J \subset K \cap J'$ dus $J \cap J' \neq \emptyset$ maar dan is P geen partitie! dus volgt $f(x) = c(J) = d(K)$ met $K \in Q$ de unieke K met $x \in K$, en is d dus de partitiefunctie voor f t.o.v. partitie Q.

Def Zij $f \in PC(I)$ (dus I bgd iv $\subset \mathbb{R}$) dan definiëren we wanneer P van I een partitie is met $c: P \to \mathbb{R}$ en $f(x) = c(J)$ $\forall x \in I$ met $x \in J \in P$, de "stuksgewijze integraal van f over I "ten opzichte van P"" als

$$pc\int_{I;P} f(x)dx = \sum_{J \in P} c(J)\,|J|$$

(Dit is welgedefinieerd want de som links specificeert geen volgorde maar dit is een eindige som dus wegens associativiteit en commutativiteit van $+$ komt hier met elke volgorde hetzelfde uit.)

Prop Zij $f \in PC(I)$ en f pc t.o.v $d: Q \to \mathbb{R}$ en $c: P \to \mathbb{R}$. Dan

$$\int_{I;P} f(x)dx = \int_{I;Q} f(x)dx$$

m.a.w. de keuze van partitie maakt niet uit en we kunnen net zo goed schrijven

$$\int_I f(x)dx := \int_{I;P} f(x)dx = \int_{I;Q} f(x)dx.$$

Bew twee gevallen : (i) $Q < P$ en (ii) $Q \not< P$

(i) in dat geval (opgave 7.1.8) hebben $d: Q \to \mathbb{R}$ en $c: P \to \mathbb{R}$ het volgende verband:

voor elke $J \neq \emptyset$, $J \in P$ is er een $Q_J \subset Q$, partitie van J van intervallen in Q en $Q = \bigcup_{J \in P} Q_J$

en voorts $d(K) = c(J)$ als $Q_J \ni K$.

Bewijs (7.1.8) : definieer per $J \in P$: $Q_J = \{K \in Q : \exists x \in J \ x \in K\}$
dan volgt: voor elke $x \in J$, $x \in I$ dus er is een unieke $K \in Q$ met $x \in K$ en bovendien $x \in J$, $x \in K$ dus $K \in Q_J$
hieruit volgt dat K ook in Q_J uniek is, zodat Q_J een partitie is van J, want als $K \in Q_J$ geldt namelijk ook $K \cap J \neq \emptyset$ dus moet wel $K \subset J$, anders zou $K \subset J'$ voor $J \neq J' \in P$ maar dan $J' \cap J \supset J \cap K \neq \emptyset$ en dan zou voor $x' \in J \cap J'$ de $J \in P$ met $x' \in J$ niet uniek zijn, tegenspraak (P is partitie) : dus volgt precies de definitie dat Q_J partitie van J is. En dan is $\bigcup_{J \in P} Q_J \ni K \Leftrightarrow \exists J \in P \ \exists x \in J \ x \in K$
en $\bigcup P = I$ dus $\Leftrightarrow \exists x \in I \ x \in K \Leftrightarrow K \in Q$
dus $\bigcup_{J \in P} Q_J = Q$ en elke $K \in Q$ zit in een unieke $Q_J \subset Q$.

voorts : als $K \in Q_J$, dan $K \subset J$ geheel en wegens disjunctie van intervallen $J \in P$ is er geen andere $J' \in P$ $J' \neq J$ met $K \subset J'$, dus $d(K) = f(x)$ voor $x \in K \subset J$, dus $= c(J)$ en dit is welgedefinieerd want voor elke $x \in K$ geldt dat $x \in J \in P$ en J is hiervoor uniek bepaald in P.

Dan volgt $pc\int_{I;Q} f(x)\,dx = \sum_{K \in Q} d(K)|K| = \sum_{J \in P} \sum_{K \in Q_J} d(K) K$

elke K zit in precies een $Q_J \subset Q$ voor $J \in P$

maar voor $K \in \mathcal{Q}_J$ geldt $d(K) = c(J)$, haal deze door de som heen :

$$= \sum_{J \in \mathcal{P}} \left(c(J) \cdot \sum_{K \in \mathcal{Q}_J} |K| \right)$$ en wegens het voorgaande is $\mathcal{Q}_J$ partitie van J dus met 7.1.3 volgt:

$\sum_{K \in \mathcal{Q}_J} |K| = |J|$ dus hiermee herleiden we tot:

$$= \sum_{J \in \mathcal{P}} c(J)|J| \overset{\text{def}}{=} pc\int_{I;\mathcal{P}} f(x)\,dx$$ einde $\boxed{i}$

geval (ii): als $\mathcal{Q} \nsim \mathcal{P}$ dan kunnen we altijd $\mathcal{P}\#\mathcal{Q}$ bekijken: deze is fijner dan $\mathcal{Q}$ én $\mathcal{P}$.

dan volgt wegens (i): $pc\int_{I;\mathcal{P}} f(x)\,dx \underset{\substack{(i)\\ \mathcal{P}\#\mathcal{Q} < \mathcal{P}}}{=} pc\int_{I;\mathcal{P}\#\mathcal{Q}} f(x)\,dx \underset{\substack{(i)\\ \mathcal{Q} > \mathcal{P}\#\mathcal{Q}}}{=} pc\int_{I;\mathcal{Q}} f(x)\,dx$

En dit bewijst het alg. geval $\square$

St 7.1.12 Eigenschappen van $pc\int_I \cdot\, dx$

$I \subset \mathbb{R}$ bgd interval $g, f: I \to \mathbb{R}$ stuksgewijs constante functies

(i)

voor $a, b \in \mathbb{R}$ $af + bg \in PC(I)$ en

$$p\!\int_I (af + bg)(x)\,dx = a \cdot pc\int_I f(x)\,dx + b \cdot pc\int_I g(x)\,dx$$

dus $pc\int_I \cdot\, dx$ is lineair. $(PC(I) \to \mathbb{R})$

(ii) $f \geq g$ puntsgewijs, dan $pc\int_I f(x)\,dx \geq pc\int_I g(x)\,dx$

(iii) $f(x) = c$ $\forall x \in I$, dus pc wrt $\mathcal{P} = \{I\}$, dan

$$pc\int_I f(x)\,dx = c \cdot |I|$$

7.1.12 Eigenschappen van de pc-integraal:
Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ bgd. interval en $f, g \in PC(I)$, $a, b \in \mathbb{R}$

(i)
dan $af + bg \in PC(I)$ en $pc\int_I (af+bg)(x)\,dx$

(ii)
als $f \geq g$, dwz $\forall x \in I \quad f(x) \geq g(x)$, dan volgt

$$pc\int_I f(x)\,dx \geq pc\int_I g(x)\,dx$$

(iii)
als $f(x) = c$, $\forall x \in I$, dan $f \in PC(I)$, n.l. met $P = \{I\}$, $c : P \to \mathbb{R}$
door $c : I \mapsto c$ en f p.c. wrt c, en uit de definitie
van de pc-integraal volgt direct:

$$pc\int_I f(x)\,dx = \sum_{K \in \{I\}} c(K)\,|K| = c(I)\,|I| = c \cdot |I|$$

(iv) Als $\{J, K\}$ een partitie is van I, dwz $J \cup K = I$
als disjuncte vereniging (equivalent $\forall x \in I \ \exists! B \in \{J, K\} \ x \in B$)
Dan zijn $f|_J$ en $f|_K$ $\in PC(J)$ en $\in PC(K)$ en:

$$pc\int_J f|_J(x)\,dx + pc\int_K f|_K(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$$

(v) als $J \subseteq \mathbb{R}$ bgd interval en $J \supseteq I$, dan is de
"uitbreiding" $F : J \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in I \\ 0 & \text{als } x \in J - I \end{cases}$
pc(J) en

$$\int_J F(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx.$$

Opgave uit HW 08

E.1

(a) dit is 7.1.12 (i), "PC(I)"

(b) fg zijn ook $PC(I)$

(c) $\max\{f, g\}$ is $PC(I)$

(d) $|f|$ is $PC(I)$

E.2

(a) dit is 7.1.12 (i), "integraal"

(b) dit is 7.1.12 (ii)

(c)
$$pc\int_I \max\{f,g\}(x)\,dx \geq \max\left\{pc\int_I f(x)\,dx,\ pc\int_I g(x)\,dx\right\}$$

E.2 (d) $\left| pc\int_I f(x)\,dx \right| \leq pc\int_I |f(x)|\,dx$

merk op dat we deze integralen kunnen definiëren omdat de geïntegreerde functies per E.1 pc zijn.

hiermee zijn 7.1.12 (i), (ii) en (iii) reeds bewezen.

— Bewijs van

(iv) Wanneer $f \in PC(I)$ wrt een partitie P, dan wegens opgave 7.18 ook wrt een fijnere partitie $Q < P$ van I. Bovendien is er een partitie van Q in $\{Q_J : J \in P\}$ waarbij $Q_J = \{K \in Q : K \subseteq J\}$ voor $J \in P$.

maar dan nemen we dus de functie $d : \{J,K\}\#P \to \mathbb{R}$ en omdat $\{J,K\}\#P < P$ bestaat deze zodat $f(x) = d(B)$ voor $B \in \{J,K\}\#P$.

Bovendien induceert $Q = \{J,K\}\#P$ twee partities Q_J, Q_K van J, respectievelijk K. We zien dat voor $d|_{Q_J}$ geldt: als $x \in J$ dan is er een unieke $B \in Q_J$ met $x \in B$, én: $f(x) = d(B) = d|_{Q_J}($ dus $f|_J(x) = f(x) = d|_{Q_J}(B)$

en dus is $f|_J \in PC(J)$ wrt Q_J met $d|_{Q_J}$.

Precies hetzelfde argument voor K.

We kunnen dus de PC-integraal nemen, en:

$$pc\int_I f(x)\,dx = \sum_{B \in Q} d(B)\,|B| = \sum_{B' \in \{J,K\}} \sum_{B \in Q_{B'}} d(B)\,|B|$$

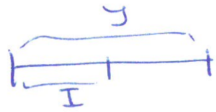
$$= \sum_{B \in Q_J} d(B)\,|B| + \sum_{B \in Q_K} d(B)\,|B|$$

$$= \sum_{B \in Q_J} d|_{Q_J}(B)\,|B| + \sum_{B \in Q_K} d|_K(B)\,|B|$$

$$= \int_J f|_J(x)\,dx + \int_K f|_K(x)\,dx$$

óf $\sup I = \sup J$

neem $\inf(I) = \inf(J)$:



(v) definieer voor $c : P \to \mathbb{R}$ de stukfunctie van f, dus
$(\forall x \in I \ \exists! J \in P \ \ x \in J) \wedge (\forall x \forall J \ \ x \in J \in P \Rightarrow f(x) = c(J))$

dan definiëren we $d : P \cup \{J - I\} \to \mathbb{R}$ door
$d(K) = c(K)$ als $K \in P$
$d(K) = 0$ als $K = J - I$. dit is welgedefinieerd want $J - I \notin I$ dus $J - I \notin P$, en als $K \in P \cup \{J-I\}$ dan $K \in P$ of $K \in J - I$ per definitie. Bovendien is $P \cup \{J - I\}$ een partitie van J, want J is begrensd en $P \cup \{J-I\}$ eindig en als $x \in J$, dan $x \in I$ en dan $x \notin J - I$ dus er is in P een unieke $B \in P$ met $x \in B$ en deze is ook in $P \cup \{J - I\}$ uniek omdat $x \notin J - I$.
En als $x \in J - I$ dan $x \notin I$ dus $x \in B$ voor $B = J - I \in P \cup \{J - I\}$ en B is weer uniek want $x \notin I$ dus omdat $\bigcup P = I$ is er geen $B \in P$ met $x \in B$.
Oftewel $\forall x \in J \ \exists! B \in P \cup \{J - I\} \ \ x \in B$.

Voor $x \in J$ geldt: als $x \in I$ dan voor $x \in B \in P$, B uniek, dat $F(x) = f(x) = c(B) = d(B)$ en als $x \in J - I$, andere geval, dan $F(x) = 0 = d(B)$, dus $F \in PC(J)$ wrt. $d : P \cup \{J - I\} \to \mathbb{R}$. En wegens (iii) geldt dat $\underset{F|_{J-I}}{\overset{\shortparallel}{0}} \in PC(J - I) : x \mapsto 0$
dus met (iv):

$$pc\int_J F(x)\,dx = pc\int_I f(x)\,dx + \underbrace{pc\int_{J-I} 0(x)\,dx}$$

$$= pc\int_I f(x)\,dx + 0 = pc\int_I f(x)\,dx.$$

in het algemene geval, dus $\inf J$ niet perse gelijk aan $\inf I$, breiden we eerst uit naar $J' = (I \cup [\sup I, \infty)) \cap J$ welke wel $\inf J' = \inf I$. en vervolgens vanuit J' naar J, welke $\sup J' = \sup J$ heeft.

$\square$

7.2 De Riemann-Integraal

Een korte opmerking vooraf: voor $I \subset \mathbb{R}$ bgd interval en $f \in PC(I)$ volgt dat $f(I) = c(P)$ en dit is een eindige verzameling, waar we dus een maximum van kunnen nemen. f neemt max. aan en is i.h.b. begrensd.

Def Voor $I \subset \mathbb{R}$ bgd i.v. en $f: I \to \mathbb{R}$ bgd. functie definiëren we de Riemannbovenintegraal als: (van f over I)

$$\overline{\int_I} f(x)\,dx := \inf \left\{ pc\int_I g(x)\,dx \;:\; g \in PC(I) \text{ en } g \geq f \right\}$$

Deze definitie is valide, want deze verzameling is
1) niet-leeg en 2) van onderen begrensd (in $\mathbb{R}$, dus heeft dan inf)

Bew 1) definieer $g: I \to \mathbb{R}$ door $g(x) = M$, voor alle $x \in I$, waarbij $M \in \mathbb{R}$ $|f|$ begrensd, dan $g(x) \geq M \geq f(x) \, \forall \in I$ en $g \in PC(I)$ namelijk t.o.v $P = \{I\}$ en $c: I \mapsto M$

2) $|f(x)| \leq M \; \forall x \in I$, dus $f(x) \geq -M \; \forall x \in I$ waaruit volgt voor $g \in PC(I)$ en $g \geq f$, dan $g(x) \geq -M \; \forall x \in I$, en dus voor g pc tov P, $\forall J \in P$ $c(J) \geq -M$ zodat

$$pc\int_I g(x)\,dx = \sum_{J \in P} c(J)|J| \geq \sum_{J \in P} (-M)|J| = -M \sum_{J \in P} |J| = -M|I|$$

oftewel, $\left\{ pc\int_I g(x)\,dx : g \in PC(I) \text{ en } g \geq f \right\}$ is v.o bgd door $-M|I|$. Het heeft met 1) en 2) dus een inf.

Def Evenzo definiëren we voor bgd $f: I \to \mathbb{R}$ op intv. I de Riemannonderintegraal van f over I als:

$$\underline{\int_I} f(x)\,dx := \sup \left\{ pc\int_I g(x)\,dx \;:\; g \in PC(I),\; g \leq f \right\}$$

Def f heet Riemannintegreerbaar als geldt $\underline{\int_I} f(x)\,dx = \overline{\int_I} f(x)\,dx$ en we definiëren dan de Riemannintegraal als $\int_I f(x)\,dx$ //

$\square$

Lemma $I \subset \mathbb{R}$ interval en $f: I \to \mathbb{R}$ bgd functie met $\forall x \in I \; |f(x)| \leq M$ voor $M \in \mathbb{R}$. Dan volgt:

$$-M|I| \leq \underline{\int}_I f(x)\,dx \leq \overline{\int}_I f(x)\,dx \leq M|I|$$

Bew de voorste ongelijkheid moest worden aangetoond om te laten zien dat $\underline{\int}_I f(x)\,dx$ bestond, hetzelfde geldt voor de achterste ongelijkheid. Resteert alleen nog de middelste.

Neem $g, h \in PC(I)$ en $g \leq f \leq h$ (puntsgewijs, duh)
Dan weten we $g \leq h$ en wegens monotoniciteit van $pc\int \cdot\, dx$ volgt

$$pc\int_I g(x)\,dx \leq pc\int_I h(x)\,dx$$

voor will. dus alle $h, g \in PC(I)$ met $g \leq f \leq h$ dus kunnen we links supremum nemen: voor alle $h \in PC(I)$, $h \geq f$:

$$\sup_{g \in PC(I)\, g \leq f} \left(pc\int_I g(x)\,dx \right) \leq pc\int h(x)\,dx$$

neem dan nu inf over h, dan staat er:

$$\sup_{g \in PC(I),\, g \leq f} \left(pc\int_I g(x)\,dx \right) \leq \inf_{h \in PC(I),\, h \geq f} pc\int_I h(x)\,dx$$

En dit is per definitie de te bewijzen ongelijkheid $\square$

Vbd Er zijn genoeg functies die niet Riemann-integreerbaar zijn, bijvoorbeeld $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ door $x \mapsto 1$ als $x \in \mathbb{Q}$ en 0 anders. Je kunt aantonen (HW-opgave 3 week 8, zie bijlage!) dat $\underline{\int}_I f(x)\,dx = 0$, $\overline{\int}_I f(x)\,dx = 1$ $\square$

We willen nu aantonen dat in elk geval pc-functies Riemannintegreerbaar zijn en dat hun pc-integraal hetzelfde is als de Riemannintegraal. Dit maakt de Riemann-integraal in elk geval "backwards compatible" :)

Lemma $I \subset \mathbb{R}$ bgd iv. en $f \in PC(I)$. Dan is f Riemann-integreerbaar en voorts geldt
$$\int_I f(x)\,dx = pc\int_I f(x)\,dx$$

Bew Aan begin van deze paragraaf lieten we zien dat $f \in PC(I)$ als bereik een eindige verzameling heeft en dus een maximum en minimum aanneemt en dus bgd is.

Hierdoor zijn de Riemannonder-en -bovenintegraal goed te definiëren. Bovendien geldt $f \in PC(I)$ en $f \geq f$ dus volgt
$$\left\{ pc\int_I g(x)\,dx : g \leq f \right\} \ni pc\int_I f(x)\,dx \in \left\{ pc\int_I g(x)\,dx : g \geq f \right\}$$

zodat
$$pc\int_I f(x)\,dx \leq \sup_{\substack{g \in PC(I) \\ g \leq f}} pc\int_I g(x)\,dx \leq \inf_{\substack{g \in PC(I) \\ g \geq f}} pc\int_I g(x)\,dx \leq pc\int_I f(x)\,dx$$

maar dan volgt $pc\int_I f(x)\,dx = \underline{\int_I} f(x)\,dx = \overline{\int_I} f(x)\,dx$
zodat tegelijk
is bewezen dat f Riemannintegreerbaar is en dat $\int_I f(x)\,dx = pc\int_I f(x)\,dx$

$\square$

7.3 Eigenschappen van Riemannintegraal & Welke functies zijn Riemannintegreerbaar?

- We willen graag de eigenschappen van $pc\int_I \cdot\,dx$ generaliseren naar $\int_I \cdot\,dx$:

St 7.3.1 $I \subset \mathbb{R}$ bgd iv. en zij $f, g : I \to \mathbb{R}$ bgd en Riemannintegreerbaar (aanname). Dan:

(i) Voor $a, b \in \mathbb{R}$ is $af + bg : I \to \mathbb{R}$ Riemannintegreerbaar en er geldt:
$$\int_I af(x) + bg(x)\,dx = a\int_I f(x)\,dx + b\int_I g(x)\,dx$$

(ii) als $f \geq g$ dan $\int_I f(x)\,dx \geq \int_I g(x)\,dx$

(iii) als $\{J, K\}$ partitie van I is dan zijn $f|_J$ en $f|_K$ Riemann-integreerbaar en
$$\int_I f(x)\,dx = \int_J f(x)\,dx + \int_K f(x)\,dx$$

(iv) als $I \subset J$, J begr interval en $F : J \to \mathbb{R}$ door $F(x) = f(x)$ als $x \in I$ en als $x \in J - I$ dan 0, dan is F Riemann-integreerbaar en
$$\int_J F(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx.$$

(v) $\max\{f,g\}$ en $\min\{f,g\} : I \to \mathbb{R}$ zijn Riemann-integreerbaar en ihb is $|f|$ Riemannintegreerbaar, en
$$\int_I \max\{f,g\}(x)\,dx \geq \max\left\{ \int f(x)\,dx, \int g(x)\,dx \right\}$$

Direct gevolg: $|f|$ is Riemann-integreerbaar en

7.3.2
$$\int_I |f(x)|\,dx \geq \left| \int_I f(x)\,dx \right|$$

$\square$

We willen eerst graag een sluitend bewijs hebben gegeven van de onderdelen van 7.1.12 die niet in het huiswerk zaten: (iii), (iv) en (v)

Dat is nu gegeven, zie voorgaande.

Bewijs van 7.3.1 :

(i) Het voldoet om een bewijs te geven voor $\boxed{a > 0,\ b = -1.}$

— Dan volgt de rest namelijk wegens: als $a \in \mathbb{R}$ dan is $a = -|a|$ als $a < 0$ en dan is omdat $0 : x \to 0$ pc-int.grbaar is dus ook Riemannintegreerbaar met integraal $0 = pc\int_I 0\,dx$ (zie 7.1.12.(iii) toegepast op $c = 0$) en dan $af : I \to \mathbb{R}$ is gewoon $0 - |a|f$ en deze is wegens ons geval R. intgr.b omdat $|a|f$ dat is omdat $|a|f - 0$ dat is in ons geval.

— En voorts zijn voor f, g, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ weer αf, $(-\beta)g$ integreerbaar en volgt met ons geval $\alpha f - -\beta g = \alpha f + \beta g$ integreerbaar. Dus $a > 0$, $b = -1$ is voldoende (voor $a = 0$, weten we overigens al dat $0f \equiv 0$ pc - dus R-intg. baar is met integraal 0)

begin: neem $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Dan voor $h, k \in PC(I)$ en $a > 0$, $h \le f$, $k \ge g$ volgt $ah - k \le af - g$, dus omdat $ah - k \in PC(I)$ (HW08) volgt $ah - k \in \{m \in PC(I) : m \le af - g\}$. Dus

$$\underline{\int} af - g = \sup\{pc\int m : m \le af - g\} \ge pc\int ah - k \overset{7.1.12}{=} a\,pc\int h - pc\int k$$

we hebben dus een bovengrens voor alle $h, k \in PC(I)$ zodat $h \le f$, $k \ge g$ en er volgt: $\{a\,pc\int h - pc\int k : h, k \in PC(I),\ h \le f,\ k \ge g\}$ is niet leeg en heeft supremum. kortheidshalve:

$$\sup_{h,k}\left(a\,pc\int h - pc\int k\right) \le \underline{\int} af - g$$

$$\| $$

$$a \cdot \sup_{h \le f}(pc\int h) - \inf_{k \ge g} pc\int k = a\underline{\int} f - \overline{\int} g$$

want $a > 0$ — want $(-1) < 0$, we passen hier toe dat

$$\sup rA = \begin{cases} r \sup A & r \ge 0 \\ -r \inf A & r < 0 \end{cases}$$

en f, g zijn R-intgrbaar dus $a\underline{\int} f - \overline{\int} g = a\int f - \int g$

als $j \geq f$, $l \leq g$, $j, l \in PC(I)$, dan volgt
$aj - l \in \{ m \in PC(I) : m \geq af - g \}$ dus volgt

$$\overline{\int} af - g \geq pc\int aj - l = a \cdot pc\int j - pc\int l$$

dus $\overline{\int} af - g \geq a \cdot \inf_{j \geq f} pc\int j - \sup_{l \leq g} pc\int l = a\overline{\int} f - \underline{\int} g$

$$= a\int f - \int g$$

$\Longrightarrow$ $a\int f - \int g \leq \underline{\int} af - g \leq \overline{\int} af - g \leq a\int f - \int g$

(deze zijn overigens goed gedefinieerd omdat f, g bgd zijn, dus $af - g$ ook)

$\Rightarrow$ $\underline{\int} af - g = \overline{\int} af - g = a\int f - \int g$ dus $af - g$ Riemannintegreerbaar en wel $\int af - g = a\int f - \int g$.

Hieruit volgt het algemene geval □

(ii) We laten dit zien voor het geval $g \equiv 0$, dus $g : x \mapsto 0$
Dit is equivalent aan het algemene geval, want
als $f \geq g$ en f, g R-integreerbaar dan wegens (i)
ook $f - g$ en $f - g \geq 0$ dus volgt $\int f - g \geq 0$
en links staat wegens (i) juist $\int f - \int g$, ≥ 0 dus

neem $f \geq 0$ R-integreerbaar. Dan: construeer een
pc-functie $h : I \to \mathbb{R}$ door $h(x) = 0 \quad \forall x \in I$.
Dit is een pc-functie wegens 7.1.12 met pc-integraal
$pc\int h = 0 \cdot |I| = 0$, ook wegens 7.1.12. bovendien $h \leq f$
Dus $0 = pc\int_I h \in \{ pc\int m : m \in PC(I), m \leq f \}$
dus volgt voor het supremum, een bovengrens,
dat $0 \leq \sup \{ pc\int m : m \in PC(I), m \leq f \} = \underline{\int_I} f = \int f$
$\Longrightarrow$ $\int f \geq 0$

□

7.1.3 (iii) Omdat f Riemm.integreerbaar is op I, is f sowieso begrensd. Maar dan zijn $f|_J : J \to \mathbb{R}$, $f|_K : K \to \mathbb{R}$ ook begrensd, ga de definitie maar na. Dus kunnen we $\overline{\int}_K f|_K$, $\overline{\int}_J f|_J$, $\underline{\int}_K f|_K$ en $\underline{\int}_J f|_J$ definiëren

Bovendien geldt voor elke $h \in PC(I)$, $h \geq f$ dat $h|_J \in PC(J)$, $h|_K \in PC(K)$ en $h|_J \geq f|_J$, $h|_K \geq f|_K$
zodat volgt $\overline{\int}_K f|_K = \inf\limits_{\substack{k \in PC(K) \\ k \geq f|_K}} pc\int_K k \leq pc\int h|_K$, hetzelfde voor $[K/J]$

Dus $\forall h \in PC(I)$ $h \geq f$: $\overline{\int}_J f|_J + \overline{\int}_K f|_K \leq pc\int h|_J + pc\int h|_K = pc\int_I h$
de laatste gelijkheid wegens 7.1.12 (iv)

Dus geldt voor de kleinste ondergrens: $\inf\limits_{\substack{h \in PC(I) \\ h \geq f}} pc\int_I h \geq \overline{\int}_J f|_J + \overline{\int}_K f|_K$
en dit is per definitie $\overline{\int}_I f$

Nu analoog: neem $\ell \in PC(I)$ $\ell \leq f$, dan $\ell|_J \leq f|_J$, $\ell|_K \leq f|_K$
en $f|_J$, $f|_K$ zijn bgd. dus definiëren we $\underline{\int}_X f|_X$ voor $X = J, K$.

en er geldt: $\underline{\int}_J f|_J \geq pc\int_J \ell|_J$, $\underline{\int}_K f|_K \geq pc\int_K \ell|_K$
per definitie van "sup"

Dus $\underline{\int}_J f|_J + \underline{\int}_K f|_K \geq pc\int_J \ell|_J + pc\int_K \ell|_K \overset{7.1.12\,(iv)}{=} pc\int_I \ell$
neem supremum rechts: dat kan omdat f R-integreerbaar is dus de onderintegraal, die we dan krijgen, is goed gedefinieerd:

$$\underline{\int}_J f|_J + \underline{\int}_K f|_K \geq \sup_{\substack{\ell\ pc \\ \ell \leq f}} pc\int_I \ell = \underline{\int}_I f$$

nu staat er:

$$\underline{\int}_J f|_J + \underline{\int}_K f|_K \leq \overline{\int}_J f|_J + \overline{\int}_K f|_K \leq \overline{\int}_I f = \int_I f = \underline{\int}_I \leq \underline{\int}_J f|_J + \underline{\int}_K f|_K$$

$$\Rightarrow \underline{\int}_J f|_J + \underline{\int}_K f|_K = \overline{\int}_J f|_J + \overline{\int}_K f|_K = \int_I f$$

nu zegt dit nog niet dat $\underline{\int}_J f\downharpoonright_J = \overline{\int}_J f\downharpoonright_J$, $\underline{\int}_K f\downharpoonright_K = \overline{\int}_K f\downharpoonright_K$
dat volgt pas nadat we opmerken:

$\underline{\int}_{J(K)} f\downharpoonright_{J(K)} \leq \overline{\int}_{J(K)} f\downharpoonright_{J(K)}$ altijd, en omdat $\underline{\int}_J f\downharpoonright_J + \underline{\int} f\downharpoonright_K = \overline{\int}_J f\downharpoonright_J + \overline{\int}_K f\downharpoonright_K$
volgt:

$$\underline{\int}_J f\downharpoonright_J = \underline{\int}_J f\downharpoonright_J + \underline{\int}_K f\downharpoonright_K - \underline{\int} f\downharpoonright_K \geq \underline{\int}_J f\downharpoonright_J + \underline{\int}_K f\downharpoonright_K - \overline{\int}_K f\downharpoonright_K$$
$$= \overline{\int}_J f\downharpoonright_J + \overline{\int}_K f\downharpoonright_K - \overline{\int}_K f\downharpoonright_K = \overline{\int}_J f\downharpoonright_J$$

$\Rightarrow \underline{\int}_J f\downharpoonright_J \lesseqgtr \overline{\int}_J f\downharpoonright_J$ dus $\underline{\int}_J f\downharpoonright_J = \overline{\int}_J f\downharpoonright_J$

en daaruit volgt direct $\underline{\int}_K f\downharpoonright_K = \overline{\int}_K f\downharpoonright_K$
dus $f\downharpoonright_J$ en $f\downharpoonright_K$ zijn R-integreerbaar en bovendien zagen we onderaan de vorige pagina, nu met ingevuld "$\underline{\int} = \int$":

$$\int_J f\downharpoonright_J + \int_K f\downharpoonright_K = \int_I f \qquad \square$$

7.3.1.(iv) we hebben dus $F: J \longrightarrow \mathbb{R}$ door $F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I \\ 0 & x \in J-I \end{cases}$

Splits het deel $J-I$ in de intervallen
$K = \{x \in J-I : x \leq \inf I\}$ en $L = \{x \in J-I : x \geq \sup I\}$
Dan geldt, omdat F begrensd is door dezelfde constante als f, dat de boven- en onderintegralen van F te definiëren zijn en er geldt zoals met (iii):

$$\overline{\int}_J F \leq \overline{\int}_K F\downharpoonright_K + \overline{\int}_I F\downharpoonright_I + \overline{\int}_L F\downharpoonright_L = \overline{\int}_K 0 + \overline{\int}_I f + \overline{\int}_L 0$$

maar 0 is R-integreerbaar want $0 \in PC(K)$, $0 \in PC(L)$
en dus $pc\int_{K(L)} 0 = \int_{K(L)} 0 = \underline{\int}_{K(L)} 0 = \overline{\int}_{K(L)} 0$ en $pc\int_X 0 = 0 \cdot |X| = 0$

evenzo $\underline{\int}_J F \geq \underline{\int}_K F\downharpoonright_K + \underline{\int}_I F\downharpoonright_I + \underline{\int}_L F\downharpoonright_L = \underline{\int}_K 0 + \underline{\int}_I f + \underline{\int}_L 0$
$= \int_I f$

$\Rightarrow \overline{\int}_J F \leq \int_I f \leq \underline{\int}_J F$ terwijl sowieso $\overline{\int}_J F \geq \underline{\int}_J F$

$\Rightarrow \overline{\int}_J F = \underline{\int}_J F = \int_I f$ dus F is R-integreerbaar met

$$\int_J F = \int_I f \qquad \square$$

7.3.1. (v) We begrijpen dat wanneer $\max\{f,g\}$ Riemm-integreerbaar zou zijn, dat dan wegens (ii) volgt $\int_I \max\{f,g\} \geq \int_I f$, $\int_I \max\{f,g\} \geq \int_I g$ oftewel

$\int_I \max\{f,g\} \geq \max\{\int_I f, \int_I g\}$. Probleem: er is niet gegeven dat $\max\{f,g\}$ eigenlijk wel Riemm-integreerbaar is, dat moeten we aantonen

— We gaan nu een techniek gebruiken die we in opvolgende bewijzen vaak zullen tegenzien: aantonen dat de functie H begrensd is en dat $\overline{\int} H - \underline{\int} H$ willekeurig klein (≥ 0) kan worden gemaakt. Dan volgt immers $\overline{\int} H = \underline{\int} H$.

neem $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $f_\ell, f_u, g_\ell, g_u \in PC(I)$ met $f_\ell \leq f \leq f_u$ en $g_\ell \leq g \leq g_u$, en zodanig dat

$$\left(pc\int_I f_u\right) - \varepsilon < \int_I f < \left(pc\int_I f_\ell\right) + \varepsilon$$

$$\left(pc\int_I g_u\right) - \varepsilon < \int_I g < \left(pc\int_I g_\ell\right) + \varepsilon$$

waarom kan dit? $\int_I f = \underline{\int} f$ is het sup. over alle f_ℓ, dus $(\int_I f) - \varepsilon < \inf_{f_\ell} pc\int_I f_\ell$, dus er is een f_ℓ met $(\int_I f) - \varepsilon < f_\ell$. hetzelfde voor f_u, g_u en g_ℓ.

omdat f,g bgd zijn is $\max\{f,g\}$ dat ook, dus definiëren we $\overline{\int}$ en $\underline{\int}$ en:

$$0 \leq \overline{\int_I} \max\{f,g\} - \underline{\int_I} \max\{f,g\} \leq pc\int_I \max\{f_u,g_u\} - \int_I \max\{f_\ell,g_\ell\}$$

want $\max\{f_u,g_u\}$ is PC en $\geq \max\{f,g\}$. en evenzo voor $\max\{f_\ell,g_\ell\}$ pc en is $\leq \max\{f,g\}$

Dit was een huiswerkopgave in HW08. De som van twee pc-integralen kan naar binnen genomen worden

Maar definieer eerst de functie $h = f_u - f_\ell + g_u - g_\ell \in PC(I)$

dan $pc\int_I h < \varepsilon - -\varepsilon + \varepsilon - -\varepsilon = 4\varepsilon$ en $h \geq 0$

$h \geq g_u - g_\ell \geq 0$
$h \geq f_u - f_\ell \geq 0$

dus

bovendien $f_n = f_\ell + (f_u - f_\ell) \leq f_\ell + h$
$g_n = g_\ell + (g_u - g_\ell) \leq g_\ell + h$

dus $\max\{f_u, g_u\} \leq \max\{f_\ell + h, g_\ell + h\} = \max\{f_\ell, g_\ell\} + h$

dus $0 \leq pc\int_I \max\{f_u, g_u\} - pc\int_I \max\{f_\ell, g_\ell\} = pc\int_I \max\{f_u,g_u\} - \max\{f_\ell, g_\ell\}$

$\leq pc\int_I h = 4\varepsilon$

want max − max $\leq h$ en st. 7.1.12 $\Rightarrow$ will. klein dus
Riemannintegreerbaar. Uit 7.3.1 (ii) volgt de rest $\square$

— Directe gevolgen

1. voor f, g Riemannintegreerbaar is $\min\{f,g\} = -\max\{-f,-g\}$
dat ook en $\int_I \min\{f,g\} = -\int_I \max\{-f,-g\}$

$\leq -\max\{-\int_I f, -\int_I g\} = \min\{\int_I f, \int_I g\}$

2. voor f Riemannintegreerbaar is $|f| = \max\{f, -f\}$
dat ook en

$$\int_I |f| \geq \max\left\{-\int_I f, \int_I f\right\} = \left|\int_I f\right|$$

$\square$

— Het product van Riemm int. functies is ook
Riemm int. Deze stelling is moeilijker te bewijzen
en gebruikt technieken zoals onder 7.3.1. (v) :

7.3.6 (Product van Riemm.int. functies is Riemm.int.) Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ bgd interval en $f, g : I \to \mathbb{R}$ bgd, Riemm.int. functies. Dan is $fg : I \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ook Riemm.int.

Bew. Neem zvva $f, g \geq 0$. Immers in het algemene geval schrijven we $f = f^+ - f^-$ met $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$ dan zijn f^+ en f^- Riemmintegreerbaar wegens 7.3.1(v), en:
$fg = f^+g^+ - f^-g^+ - f^+g^- + f^-g^-$, waarbij $f^\pm, g^\pm \geq 0$

dus als we kunnen aantonen dat fg Riemmint. is voor $f, g \geq 0$ R.int. dan volgt dat $f^\pm \cdot g^\pm$ dat zijn en dus dat $f^+g^+ - f^-g^+ - f^+g^- + f^-g^-$ dat is wegens 7.1.3(i)

Dus neem zvva $f \geq 0$, $g \geq 0$. Dan vinden we zoals in bew. v. 7.3.1 (v) dat er functies f_ℓ, f_u, g_ℓ, g_u zijn in $PC(I)$ met:

$$\underbrace{\underline{\int_I} f(x)dx}_{\text{supremum voor } f_\ell} - \varepsilon < pc\int_I f_\ell(x)dx$$

, $f \geq f_\ell$ en $f \geq 0$ dus $f_\ell \geq 0$ kunnen we nemen.

= wegens R-int.g.

en evenzo $$\underbrace{\overline{\int_I} f(x)dx}_{\text{infinimum voor } f_u} + \varepsilon > pc\int_I f_u(x)dx$$ en $f_u \geq f \geq 0$

Een beetje zoals al in 7.3.1(v) gedaan is, met de extra voorwaarde / aanname dat $f_\ell \geq 0$ $g_\ell \geq 0$

Dus: $0 \leq f_\ell \leq f \leq f_u$ $\quad 0 \leq g_\ell \leq g \leq g_u$ en

$$pc\int_I f_u(x)dx - \varepsilon < \int_I f(x)dx < pc\int_I f_\ell(x)dx + \varepsilon$$

$$pc\int_I g_u(x)dx - \varepsilon < \int_I g(x)dx < pc\int_I g_\ell(x)dx + \varepsilon$$

nu volgt natuurlijk $f_u g_u$, $f_\ell g_\ell \in PC(I)$ (§1) dus $f_\ell g_\ell \leq fg \leq f_u g_u$

bovendien $f_\ell, g_\ell \geq 0$ en $f_\ell \leq f$, $g_\ell \leq g$ dus neem pc-integr.:

$$pc\int_I \underbrace{f_\ell g_\ell}_{\geq 0}(x)\,dx \leq \underline{\int_I} fg(x)\,dx \leq \overline{\int_I} fg(x)\,dx \leq pc\int_I f_u g_u(x)\,dx$$

sup voor $(fg)_\ell$ inf voor $(fg)_u$

de Riemm onder/bovenintegralen zijn goed gedef. omdat f en g bgd zijn dus fg ook. I.h.b. laat $M_f, M_g \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zo zijn dat $\forall x \in I$ $|f(x)| \leq M_f$ $|g(x)| \leq M_g$. Dan:

dus: $0 \leq \overline{\int_I} fg(x)dx - \underline{\int_I} fg(x)dx < \underbrace{pc\int_I f_u g_u(x)dx - pc\int_I f_\ell g_\ell(x)dx}$

$$\overset{7.1.12\,(i)}{=} pc\int_I (f_u g_u - f_\ell g_\ell)(x)\,dx$$

De integrand is nu af te schatten:
want $0 \leq f \leq M_f$ op I dus we nemen $f_u \leq M_f$
en evenzo $0 \leq g \leq M_g$ op I dus we nemen $g_u \leq M_g$
en we hadden al $f_\ell \geq 0$ $g_\ell \geq 0$

$$\Rightarrow f_u g_u - f_\ell g_\ell = f_u g_u + \overbrace{f_u g_\ell - f_u g_\ell} - f_\ell g_\ell$$
$$= f_u(g_u - g_\ell) + g_\ell(f_u - f_\ell)$$
$$\leq M_f(g_u - g_\ell) + M_g(f_u - f_\ell)$$

dat geeft $pc\int_I (f_u g_u - f_\ell g_\ell)(x)dx \underset{7.1.12(ii)}{\leq} pc\int_I M_f(g_u - g_\ell) + M_g(f_u - f_\ell)\,(x)dx$

$$\overset{7.1.12\,(i)}{=} M_f\, pc\int_I g_u - g_\ell\,(x)dx + M_g\, pc\int_I f_u - f_\ell\,(x)dx$$

en wegens de "ε-aannamen" is dit

$$= M_f\left(pc\int_I g_u(x)dx - pc\int_I g_\ell(x)dx\right) + M_g\left(pc\int_I f_u(x)dx - pc\int_I f_\ell(x)dx\right)$$

$$\leq (M_f + M_g)\cdot 2\varepsilon$$ dus willekeurig klein

$\boxtimes$

Hoe deze integraal $\int_I fg(x)dx$ te berekenen, dat zegt deze stelling niet! Maar na de Hoofdstelling vd Calculus zullen we als gevolg kunnen "partieel integreren" en "substitueren" en dat zal de zaak vermakkelijken. Dan hebben we wel de voorgaande St. 7.3.8 nodig om in te zien dat de Riemannintegraal bestaat!

St 7.3.7 (Uniform continue functies zijn Riemm. int.)
$f : I \to \mathbb{R}$ bgd en uniform continu, I bgd intval $\subset \mathbb{R}$
dan is f Riemann intg. baar

Bew. Er geldt : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in I \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
Dus deel I op in intervallen van breedte δ horende bij $\varepsilon > 0$ willekeurig genomen, bijv: voor $I = [(a, b])$; $b > a$:

$$P = \{ \underbrace{\left(a + \tfrac{i}{N}(b-a) \, , \, a + \tfrac{i+1}{N}(b-a) \right]}_{=J_i} : i = 1, .., N \}$$
met interval $= J_i$ voor $i = 1$ links open/gesl als I dat is en J_N rechtsopen/gesloten als I dat is.
Hierbij $N > 0$ zdd $N\varepsilon > 1$, dus $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Dan :

zij $f_u \in PC(I)$ w.r.t. P met $f_u(x) = \sup_{y \in J_i} f(y)$ voor $x \in J_i$
zij $f_\ell \in PC(I)$ w.r.t. P met $f_\ell(x) = \inf_{y \in J_i} f(y)$ voor $x \in J_i$

Dan zien we $f_u(x) \geq f(x) \geq f_\ell(x) \quad \forall x \in I$, want voor elke i voor elke $x \in J_i$ geldt $\sup_{y \in J_i} f(y) \geq f(x) \geq \inf_{y \in J_i} f(y)$
en $\{ J_i : i = 1, .., N \}$ is juist partitie van I.

$\Rightarrow$ f is uniform cont. dus bgd, dat hebben we al gebruikt toen we sup en inf namen (bgd op J_i)
en als f bgd is op J_i, dan voor $|f(x)| < M_i$ voor $x \in J_i$ geldt $|f(x)| < M$ voor $M = \max\{M_1, \dots, M_N\}$
en dus is f bgd (f is bgd op J_i, trouwens, omdat als we $m := f\left(a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N}(b-a)\right)$ nemen dan ligt voor $\varepsilon = 1$ alle $x \in J_i$ binnen ± 1 afstand van deze waarde m omdat alle $x \in J_i$ $\frac{1}{2}\delta$ van $a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N}(b-a)$ af liggen, maar ok.)

dus definieer onder- / bovenintegraal! en we vinden omdat $PC(I) \ni f_\ell \leq f \leq f_u \in PC(I)$ dat

$$0 \leq \overline{\int_I} f(x)\,dx - \underline{\int_I} f(x)\,dx \leq {}_{PC}\!\int_{I;P} \left(f_\ell(x) - f_u(x) \right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{|J_i|}_{0 < \frac{1}{N}(b-a)} \left(\sup_{x \in J_i} f(x) - \inf_{x \in J_i} f(x) \right)$$

welnu, gezien $\forall x,y \in J_i \quad |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ omdat $|x-y| < \delta$,
volgt voor alle $x,y \in J_i$: $f(y) - \varepsilon < f(x) < f(y) + \varepsilon$
dus voor alle $y \in J_i$: $\forall x \in J_i \quad f(x) > f(y) - \varepsilon$
dus $\forall y \in J_i \quad \inf_{x \in J_i} f(x) \geq f(y) - \varepsilon$
dus $\forall y \in J_i \quad f(y) \leq \inf_{x \in J_i} f(x) + \varepsilon$

duh.

dus $\sup_{y \in J_i} f(y) \leq \inf_{x \in J_i} + \varepsilon \Rightarrow (0 \leq) \sup_{x \in J_i} f(x) - \inf_{x \in J_i} f(x) \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{pc}\int_I f_u - f_e \,(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}(b-a)\varepsilon$$ want termsgewijs

was er een produkt van twee positieve factoren waarvan
één door ε bgd : en dit is $(b-a)\varepsilon$
Dus will. klein want $0 < b-a$ is constante

$\square$

Gevolg 7.3.8 Elke continue functie op een gesloten bgd interval $I = [a,b]$ $b > a$ is R-integreerbaar.

Bew. Wegens 5.3.10 (Dirichlet) is $f : I \to \mathbb{R}$ dan uniform continu als hij continu is. Dus volgt wegens 7.3.7 meteen dat f R-intgreerbaar is $\square$

opm We werken wél met $\inf_{x \in J_i} f(x)$, $\sup_{x \in J_i} f(x)$
ook al is f uniform cont.
dus neemt maximum aan op gesloten bgd interval,
want ja, J_i is niet gesloten!

7.4 Hoofdstelling Integraalrekening

7.4.1 (H.S. Int.Rek. deel 1.)

Zij $a<b$ en zij $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ Riemm-int.

Definieer

$$F:[a,b] \to \mathbb{R} \; ; \quad F(x) = \int_{[a,x]} f(s)\,ds$$

opm Dit is een goede definitie want f is integreerbaar dus wegens 7.3.1. (iii) is $f|_{[a,x]}$ voor $[a,x] \subseteq [a,b]$ dit ook.

Er geldt nu:

1. F is uniform continu
2. als f continu is in $x_0 \in [a,b]$ dan is F diffbaar in x_0 en er geldt $F'(x_0) = f(x_0)$

Bewijs

1. We moeten aantonen $\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0 \; \forall x,y \in [a,b] \; |x-y|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(y)| < \varepsilon$.

We weten al: als $x<y$, verwissel anders x en y, (en sowieso als $x=y$ dan $F(x)-F(y)=0$ dus geldt het in elk geval), dan:

$$F(y)-F(x) = \int_{[a,y]} f(s)\,ds - \int_{[a,x]} f(s)\,ds = \int_{(x,y]} f(s)\,ds$$

wegens 7.3.1 (iii) (en deze integraal is goed gedefinieerd)

Omdat f R-int.baar is, is f in elk geval bgd, zeg door $M>0$. Dus per lemma 7.2.4:

$$-M|x-y| \leq \int_{(x,y]} f(s)\,ds \leq M|x-y|$$

$\Rightarrow \; |F(x)-F(y)| \leq M|x-y| \;\; \exists M>0, \forall x,y \in I$. Dus F is zelfs Lipschitz continu, en dus zeker uniform continu (dat was een opgave uit H.5).

2. We tonen, equivalent met diffbaarheid met afgeleide $f(x_0)$, aan dat De Newton-approximatie houdt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| F(x) - \left(F(x_0) + f(x_0)(x - x_0)\right) \right| \leq \varepsilon |x - x_0|$$

Bewijs hiervan. Wegens cont. van f hebben we voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat $|x - x_0| < \delta$, $x \in I \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
voor die x geldt dan: als $x > x_0$:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{(x_0, x]} f(s) ds \quad \text{en} \quad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

dus

$$pc\int_{(x_0, x]} f(x_0) - \varepsilon \, dx \leq F(x) - F(x_0) \leq pc\int_{(x_0, x]} f(x_0) + \varepsilon \, dx$$

$$(x - x_0)(f(x_0) - \varepsilon) \leq F(x) - F(x_0) \leq (x - x_0)(f(x) + \varepsilon)$$

$$f(x_0)(x - x_0) - \varepsilon(x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq f(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0)$$

$$\Rightarrow |F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|$$

als $x < x_0$ dan $F(x_0) - F(x) = \int_{(x, x_0]} f(s) ds$
en er volgt $|F(x_0) - F(x) - f(x_0)(x_0 - x)| \leq \varepsilon |x_0 - x|$
wat na verwisselen van termen $F(x_0)$, $F(x)$ en x_0, x gewoon hetzelfde geeft ($x = x_0$ is triviaal)

$\Rightarrow$ newton-approximatie houdt, δ is gevonden $\square$

— de H.S. vd Calculus geeft manieren om snel integralen uit te derekenen dmv <u>anti-afgeleiden</u> (van continue integranden)

def een anti-afgeleide bij een functie $f : I \to \mathbb{R}$ op I bgd interval, is een $F : I \to \mathbb{R}$ die overal op I diffbaar is met $F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$.

Deze zijn uniek op constante na: als F, G anti-afgeleiden van f zijn dan $[F - G]$ is diffbaar en $= F' - G' = f - f = 0$

Lemma (cont. functies hebben anti-afgeleiden) Zij $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continu. Dan heeft f een anti-afgeleide.

Bewijs: definieer (goed gedefinieerd, wegens opm in St. 7.4.1)
$F:[a,b]\to\mathbb{R}$ door $F(x) = \int_{[a,x]} f(s)\,ds$

Dan heeft F overal een afgeleide omdat f overal continu is, zie 7.4.1, en $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in I$
Dus F is een anti-afgeleide van f $\square$

7.4.4 (H.S. Int. Rek., deel 2.)
zij $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemannintegreerbaar en zij $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ een anti-afgeleide van f. Dan:

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(notatie $F|_a^b$)

Bewijs: We doen dit door aan te tonen dat voor elke $f_\ell, f_u \in PC(I)$, met $f_\ell \le f \le f_u$ geldt

$$pc\int_{[a,b]} f_\ell(x)\,dx \le F(b) - F(a) \le pc\int_{[a,b]} f_u(x)\,dx$$

nemen we inf over f_u en sup over f_ℓ, dan volgt

$$\underline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx \le F(b) - F(a) \le \overline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx$$

zodat, omdat $\underline{\int} = \overline{\int}$ (immers f is R-int.)
volgt

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

omdat we altijd $P \# Q$ voor twee partities kunnen nemen en f_u, f_ℓ dan altijd pc zijn wrt. deze fijnere partitie, nemen we zvva dat f_u, f_ℓ pc zijn wrt. dezelfde partitie P.

dan is elke $J \in P$ met $J \neq \emptyset$ van de vorm $J = [(b_J, e_J])$ voor $e_J > b_J$ begin / eindpunt.

En we hebben, omdat F diffbaar is de middelwaardestelling: voor elke $J \in P$, $J \neq \emptyset$ is er een $t_J \in J^\circ = (b_J, e_J)$ met $f(t_J) = \frac{F(e_J) - F(b_J)}{e_J - b_J}$

en f is Riemm. int. dus bgd, dus $\sup_{x \in J} f(x)$, $\inf_{x \in J} f(x)$ bestaan en $\sup_{x \in J} f(x) \geq f(t_J) \geq \inf_{x \in J} f(x)$

$$\Rightarrow \left(\inf_{x \in J} f(x)\right) \cdot (e_J - b_J) \leq F(e_J) - F(b_J) \leq \left(\sup_{x \in J} f(x)\right) \cdot (e_J - b_J)$$

Sommeer nu over alle J:

$$\sum_{J \in P} \left(\inf_{x \in J} f(x)\right)(e_J - b_J) \leq \sum_{J \in P} F(e_J) - F(b_J)$$

$$\leq \sum_{J \in P} \left(\sup_{x \in J} f(x)\right)(e_J - b_J)$$

midden staat de telescopende som $F(b) - F(a)$, buiten de pc.-integraal(en) van $x \mapsto \sup_{y \in J_{\ni x}} f(y)$, $x \mapsto \inf_{y \in J_{\ni x}} f(y)$

En voor elke $f_\ell, f_u \in PC(I)$ wrt P en $f_\ell \leq f \leq f_u$ geldt natuurlijk per $J \in P$ dat $f_\ell(x) \leq f(x) \leq f_u(x)$ $\forall x \in J$ $\neq \emptyset$ dus $f_\ell(x) \leq \inf_{y \in J} f(y)$ en $f_u \geq \sup_{y \in J} f(y)$ dus

$$pc\int_I f_\ell(x)\,dx \leq pc\int_{I;P} \left(t \mapsto \inf_{y \in J_t} f(y)\right)(x)\,dx \leq F(b) - F(a)$$

$$\leq pc\int_{I;P} \left(t \mapsto \sup_{y \in J_t} f(y)\right)(x)\,dx \leq pc\int_I f_u(x)\,dx$$

en dit was te bewijzen $\square$

Nu kunnen we integralen uitrekenen met anti-afgeleiden zonder inf/sups aan te tonen. Merk op dat we wel a-priori

— H.S. Calc heeft heel veel gevolgen en daarmee toepassingen. Een overzicht voor we beginnen.

1. Substitutieregel (= kettingregel toegepast in integraal)
2. Partieel integreren (= productregel toegepast in integraal)
3. integraalformule voor de restterm bij Taylor-approximatie
4. verwisselen van integraal en limiet in geval van uniforme convergentie
5. prop. 7.5.2, een talig gevolg van 4.

— Gevolg 7.4.5 "Substitutieregel"

neem $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stijgend en diff.baar (dus cont.) en zodat $g' : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integreerbaar is. Stel dat $[g(a), g(b)]$ bgd interval is (dit is automatisch zo omdat g cont. is dus bgd. op een gesloten bgd $A \subseteq \mathbb{R}$)

en neem $f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan is f uniform continu dus R-integreerbaar, en voorts geldt:

$$\int_{[g(a),\, g(b)]} f(s)\, ds = \int_{[a,b]} f(g(s))\, g'(s)\, ds$$

(lemma)
Bewijs f is cont dus heeft anti-afgeleide, neem F een anti-afgeleide $F : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ van f. Dan is F diffbaar met $F' = f$ op $[g(a), g(b)]$ en omdat g diffbaar is geldt dat $F \circ g$ dit ook is met afgeleide $(F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g'$

Omdat f continu is en g ook, is $f \circ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. en dus R-integreerbaar. g' is ook R-integreerbaar, dus wegens 7.3.6 is $(f \circ g) \cdot g'$ R-integreerbaar.
Bovendien heeft $(f \circ g) \cdot g'$ anti-afgeleide $F \circ g$

dus volgt wegens "H.S. Calc deel 2." dat voor $[a,b]$:

$$F\circ g\,(b) - F\circ g\,(a) = \int_{[a,b]} f(g(s))\,g'(s)\,ds$$

anderzijds is F de anti-afgeleide van f, dus voor $[g(a), g(b)]$:

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{[g(a),\,g(b)]} f(s)\,ds$$

hier is dus nodig dat $g(b) \geq g(a)$ als $b \geq a$

$$\Rightarrow \quad \int_{[a,b]} f(g(s))\,g'(s)\,ds = \int_{[g(a),\,g(b)]} f(s)\,ds$$

$\square$

Gevolg 7.4.6 "Partieel Integreren"

Zij $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ differentieerbare functies en neem aan dat $F', G' : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integreerbaar zijn (bijvoorbeeld omdat ze continu zijn)

Dan zijn de functies $F'G$, FG' R-integreerbaar en er volgt:

$$\int_{[a,b]} F'G\,(x)\,dx = FG(b) - FG(a) - \int_{[a,b]} FG'(x)\,dx$$

Bewijs F, G zijn diff.baar dus ook continu (HG) $\Rightarrow$ F, G zijn R-integreerbaar $\Rightarrow$ FG' en $F'G$ zijn R-integreerbaar want het product van R-int. functies. Dus de som $FG' + F'G$ is R-int. En aangezien een anti-afgeleide van $FG' + F'G$ juist FG is wegens de kettingregel, volgt:

$$\int_{[a,b]} F'G + FG'\,(x)\,dx = FG\Big|_a^b$$

nu gebruiken we lineariteit van de Riemannintegraal en halen we een integraal naar rechts. Dan staat er de gewenste $=$:

$\square$

7.4.7 (De Restterm in integraalformule) Zij $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $n+1$ keer diff.baar, en laat $f^{(n+1)} : (a,b) \to \mathbb{R}$ continu zijn. En zij $c \in (a,b)$ en de taylorbenadering rond c:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + E_n(x;f,c)$$

$$= T_n(x;f,c) + E_n(x;f,c)$$

Dan hebben we voor $x \geq c$ ($x \leq c$ is opgave, andere formule)

$$E_n(x;f,c) = \frac{1}{n!}\int_{[c,x]} (x-s)^n f^{(n+1)}(s)\,ds$$

Bew inductie op $n \geq 0$ en partieel integreren.

$n=0$ $f'|_{[c,x]}$ is cont. op $[c,x] \subset (a,b)$ en dus uniform cont. en dus R-integreerbaar, met anti-afgeleide $f|_{[c,x]}$ $\Rightarrow$

$$\int_{[c,x]} f'(s)\,ds = f(x) - f(c)$$ en dit in de gelijkheid.

$n \geq 0$ Stel voor een $n \geq 0$ geldt de uitspraak

$n+1$ laat nu f $n+2$ keer diffbaar zijn. voor $T_{n+1}(x;f,c)$ geldt $T_{n+1}(x;f,c) = T_n(x;f,c) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1!}(x-c)^{n+1}$

Dus $E_{n+1}(x;f,c) = E_n(x;f,c) - \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

$$\overset{IH}{=} \frac{1}{n!}\int_{[c,x]} (x-s)^n f^{(n+1)}(s)\,ds - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

we passen nu "partieel integreren" toe op de differentieerbare functies $F : t \mapsto f^{(n+1)}(t)$ en $G : t \mapsto (x-t)^{n+1}$; $[c,x] \to \mathbb{R}$ welke beide continue afgeleiden hebben (per aanname v inductie is $f^{(n+2)}$ continu) op gesl. interval, dus R-integreerbare afgeleiden. Er geldt dus met $F' = f^{(n+2)}$ en $G'(t) = -(n+1)(x-t)^n$ dat:

$$\int_{[c,x]} FG'(s)\,ds = FG(x) - FG(c) - \int_{[c,x]} F'G(s)\,ds$$

$$\int_{[c,x]} f^{(n+1)}(s) \cdot -(n+1)(x-s)^n\,ds = f^{(n+1)}(x)(x-x)^{n+1} - f^{(n+1)}(c)(x-c)^{n+1} - \int_{[c,x]} f^{(n+2)}(s)(x-s)^{n+1}\,ds$$

$$\Rightarrow \underbrace{-(n+1)\int (x-s)^n f^{(n+1)}(s)\,ds}_{= -(n+1)!\,E_n} = f^{(n+1)}(c)\,(x-c)^{n+1} - \int_{[c,x]} (x-s)^{n+1} f^{(n+2)}(s)\,ds$$

$$\Rightarrow -(n+1)!\,E_{n+1} = -(n+1)!\,E_n + (n+1)!\,\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-c)^{n+1}$$

$$= -\int_{[c,x]} (x-s)^{n+1} f^{(n+2)}(s)\,ds$$

$$\Rightarrow E_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_{[c,x]} (x-s)^{n+1} f^{(n+2)}(s)\,ds,$$ wat de inductiestap voltooit! $\square$

Limieten van functierijen en Riemannintegraal

– gevolg 4. en 5. van HS. calc

Vbd Zij $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geg door $f_0(x) = \begin{cases} 64\left(x - \frac{1}{4}\right) & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right] \\ 64\left(\frac{1}{2} - x\right) & x \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

dan met $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f_n(x) = 2^n f_0(2^n \cdot x)$

geldt puntsgewijs : voor $x \in \mathbb{R}$ in :

$f_n(x) = 2^n f_0(2^n x)$ en als $x < 0$ dan is $-x > 0$

dus is er een $N \geq 0$ met $2^N(-x) > \frac{1}{2}$ dus $\forall n \geq N$ $2^n x < -\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$

dus $f_n(x) = 2^n f_0(2^n x) = 2^n \cdot 0 = 0$, en hetzelfde voor $x > 0$.

dus puntsgewijs $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$. Niet uniform want N hangt af van hoe klein x is, nl. $N = \lceil \log_2(x/\frac{1}{2}) \rceil$ als $x > 0$ en $N = 0$ als $x \leq 0$. Dus niet uniform te kiezen..

en verder $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 2^n f_0(2^n x)\,dx = \int_0^{2^n} f_0(x)\,dx$

$\overset{n \geq 0 \Rightarrow 2^n \geq 1}{=} 0 + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{8}} 64\left(x - \frac{1}{4}\right) dx + \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{1}{2}} 64\left(\frac{1}{2} - x\right) dx$

$= 64 x^2 \Big|_{\frac{1}{4}}^{3/8} \underbrace{- 64 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + 64 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} - 64 x^2 \Big|_{\frac{3}{8}}^{\frac{1}{2}}$

$= 64\left(\frac{9}{64} - \frac{4}{64}\right) - 64\left(\frac{16}{64} - \frac{9}{64}\right) + 64 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \quad = 2\,?$

dus $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 2 \neq 0 = \int_0^1 \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) dx$

dus het gaat niet goed

$I \subseteq \mathbb{R}$ begrensd interval en rij $(f_n) : \mathbb{N} \to (I \to \mathbb{R})$
een rij functies $f_n : I \to \mathbb{R}$ voor $n \in \mathbb{N}$

neem aan: voor elke $n \in \mathbb{N}$ is f_n Riemannintegreerbaar
en $f_n \to f$ uniform als $n \to \infty$ voor $f : I \to \mathbb{R}$.

Dan is f Riemannintegreerbaar én

$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx$$

m.a.w. $$\int_I \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx.$$

opm We gebruiken dat alle f_n bgd zijn, zodat wegens uniforme convergentie ook f bgd is en we de onder-bovenintegralen goed kunnen definiëren.

bewijs hiervan:

Bew neem $\varepsilon > 0$ will. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zzd $\forall n \geq N$
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$, equivalent:
$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon \quad \forall n \geq N \ \forall x \in I$, dus:

neem $\varepsilon = 1$ en M bound voor f_N, dan $|f(x)| \leq M + 1$
$\forall x \in I$, dus f bgd $\square$

vervolgens geldt wegens de stelling h, f bgd en $h(x) \leq f(x)\ \forall x \in I$
$\Longrightarrow \underline{\int} h \leq \underline{\int} f$ en $\overline{\int} h \leq \overline{\int} f$, dat:

voor alle $n \geq N$:

$$\int_I f_n(x) - \varepsilon\,dx = \underline{\int_I} f_n(x) - \varepsilon\,dx \leq \underline{\int_I} f(x)\,dx \leq \overline{\int_I} f(x)\,dx$$

$$\leq \overline{\int_I} f_n(x) + \varepsilon\,dx = \int f_n(x) + \varepsilon\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \overline{\int_I} f(x)\,dx - \underline{\int_I} f(x)\,dx \leq \int_I f_n(x) - f_n(x) + 2\varepsilon\,dx$$

$$= 2\varepsilon \cdot |I|$$

willekeurig klein dus geen H.S. calc nodig!

dus f is Riemannintegreerbaar. Nu volgt dus:
voor alle $n \geq N$:

$$\int_I f_n(x)\,dx - \varepsilon|I| \leq \int_I f(x)dx \leq \int_I f(x)dx + \varepsilon|I|$$

$$\Longrightarrow \left| \int_I f(x)\,dx - \int_I f_n(x)\,dx \right| \leq \varepsilon|I|$$ willk. klein dus

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$$

$\square$

Een laatste gevolg, dat wél van H.S. Calc. gebruik maakt: relateert een rij van afgeleide functies en hun uniforme limiet aan een uniforme limiet voor de anti-afgeleiden.

$\boxed{I = [a,b]}$

Prop 7.5.2 Zij $(f_n): \mathbb{N} \to (I \to \mathbb{R})$ een rij functies $f_n: I \to \mathbb{R}$ met alle f_n diffbaar in elke $x \in I$, en met de rij afgeleidefuncties (f_n').

Zij f_n' voor elke n continue en laat (f_n') convergent zijn naar $g: I \to \mathbb{R}$ in uniforme zin.

laat er een $x_0 \in I$ zijn zodat $(f_n(x_0))$ convergent is naar $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = L$.

Dan convergeert (f_n) uniform naar $f: I \to \mathbb{R}$ en bouvendien is f differentieerbaar en $f' = g$

Bew. neem zvva $x > x_0$ dan geeft H.S calc:
f_n' is voor elke n Riemannint. dus hun uniforme limiet g ook. Beschouw de functie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = L + \int_{[x_0,x]} g(s)\,ds$$ integreeren kan dus

dan zien we f diffbaar en $f'(x) = g(x)$ wegens H.S. calc.

f heeft dus een anti-afgeleide. Het resteert nu aan te tonen dat $f_n \to f$ uniform.

Merk hiertoe op: $|f_n(x) - f(x)| =$

$$\left| f_n(x) - L - \int_{[x_0,x]} g(s)\,ds \right|$$

nu, $\lim_{n\to\infty} \int_{[x_0,x]} f_n'(s)\,ds = \int_{[x_0,x]} g(s)\,ds$

en $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = L$ dus

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \left| \int_{[x_0,x]} f_n'(s)\,ds - \int_{[x_0,x]} g(s)\,ds \right| < \varepsilon$

$|f_n(x_0) - L| < \varepsilon$

en $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{[x_0,x]} f_n'(s)\,ds$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(x_0) + \int_{[x_0,x]} f_n'(s)\,ds - L - \int_{[x_0,x]} g(s)\,ds \right|$$

$$\leq |f_n(x_0) - L| + \left| \int_{[x_0,x]} f_n'(s)\,ds - \int_{[x_0,x]} g(s)\,ds \right|$$

$$= |f_n(x_0) - L| + \left| \int_{[x_0,x]} f_n'(s) - g(s)\,ds \right|$$

7.3. nogiets

$$\leq |f_n(x_0) - L| + \int_{[x_0,x]} |f_n'(s) - g(s)|\,ds$$

en op $[a,b]$

op $[x_0,x]$

f_n', g ctn dus bgd

$$\leq |f_n(x_0) - L| + |b-a| \sup_{s\in[a,b]} |f_n'(s) - g(s)|$$ neem sup $\Rightarrow$ $f_n' - g$ bgd

nu geldt voor $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: |f_n(x_0) - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$

en ook wegens uniform $f_n' \to g$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N' \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq N \quad \forall s \in [a,b] \ |f_n'(s) - g(s)| < \frac{1}{2|b-a|}\varepsilon$

$\Rightarrow$ voor $n \geq \max\{N, N'\}$ geldt $\forall x \geq x_0$ (kleiner dan x_0 analoog)

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + |b-a| \frac{1}{2|b-a|}\varepsilon = \varepsilon \qquad \square$$