Ch. 6 Diff. bare functies — volgens d. Syllabus

Def $f: A \to \mathbb{R}$ functie, $x_0 \in A$ en x_0 is een limietpunt van A (aangezien $A \subset \bar{A}$ wil dat zeggen dat x_0 niet een geïsoleerd punt is) dan heet f differentieerbaar in x_0 als geldt $\exists L \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

we noteren $f'(x_0) = L$ dan voor deze limiet.
(We zeggen ook wel dat $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} h(x)$ "bestaat")

Opm (i) we kunnen dus per definitie geen afgeleiden vinden in geïsoleerde punten. Dit is te motiveren doordat men de limiet neemt naar x_0 maar nooit de quotiënt in x_0 zelf evalueert, zodat bij geïsol. punten voor zekere $\varepsilon > 0$ $N^*_\varepsilon(x_0) = \ldots$ $\{x \in \mathbb{R} : x \neq x_0, |x - x_0| < \varepsilon\}$ disjunct wordt met A, waardoor we elke waarde kunnen verzinnen voor $f'(x_0)$ wegens "ex falso quod libet".

(ii) doordat limieten van functies $\mathbb{R} \supset A \to \mathbb{R}$ uniek vastliggen, is ook de afgeleide $f'(a)$ in $a \in A$ uniek bepaald wanneer deze bestaat en gedefinieerd is.

(iii) differentieerbaarheid van f is een lokale eigenschap in de zin dat:

St. Als $f: A \to \mathbb{R}$ diff.baar is in lim.punt $x_0 \in A$ en $x_0 \in Y \subset A$ en x_0 is lim.punt van Y, dan volgt dat $f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ diff.baar is in x_0 en $(f|_Y)'(x_0) = f'(x_0)$
De omkering is overigens niet persé waar, z.o.z.

Bew. Wegens de definitie $x \in Y$, dan $f|_Y(x) = f(x)$, geldt:

voor $\varepsilon > 0$ willekeurig en $x \in Y$ geldt: $x \in A$ want $Y \subset A$
en dus als $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ voor de δ uit $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$
dan volgt wegens $|x - x_0| < \delta$ $x \neq x_0$ $x \in A$
z.dat $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| < \varepsilon$ en dus concluderen we

$\left| \frac{f|_Y(x) - f|_Y(x_0)}{x - x_0} - L \right| < \varepsilon$ voor $x \in Y$ $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$
en dus bestaat $(f|_Y)'(x_0)$
en is gelijk aan $L = f'(x_0)$

□

De omkering geldt onder bepaalde voorwaarden:
van belang is of x_0 in A en/of Y inwendig is.

St. Als $x_0 \in Y \subset A$, $f: A \to \mathbb{R}$ en x_0 is een inwendig punt van Y, dan is de omkering waar: dus: $(f|_Y)'(x_0)$ bestaat $\Rightarrow$ $f'(x_0)$ bestaat en $f'(x_0) = (f|_Y)'(x_0)$

Bew. Omdat $x_0 \in Y^\circ$ en $Y \subset A$ dus $Y^\circ \subset A^\circ$ (H4),
volgt dat er een $\delta_0 > 0$ is met $N_{\delta_0}(x_0) \subset Y \subset A$
Dan weten we ook uit H5 dat voor alle $\delta_0 > 0$
$E \subset A$ $x_0 \in \overline{E}$ en $h: A \to \mathbb{R}$ geldt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} h(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \cap N_{\delta_0}(x_0)}} h(x) = L$$

dus voor $h: A - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ door $h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
en $E = Y - \{x_0\}$, $E' = A - \{x_0\}$ weten we dat
$N_{\delta_0}(x_0) \cap (Y - \{x_0\}) = N^*_{\delta_0}(x_0) = N_{\delta_0}(x_0) \cap (A - \{x_0\})$ dus:

$$\underbrace{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L}_{(A)} \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (A - \{x_0\}) \cap N_{\delta_0}(x_0)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \Leftrightarrow \ldots$$

$$\ldots \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in N^*_{\delta_0}(x_0)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (Y - \{x_0\}) \cap N_{\delta_0}(x_0)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

$$\iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in Y - \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \iff \underbrace{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in Y - \{x_0\}}} \frac{f_Y(x) - f_Y(x_0)}{x - x_0} = L}_{(B)}$$

(A) is precies: $f'(x_0) = L$
(B) is precies: $(f|_Y)'(x_0) = L$

als $x_0 \in Y^o$, $Y \subset A$ dan $f'(x_0)$ bestaat en is L $\iff$ $(f|_Y)'(x_0)$ bestaat en is L

$\square$

Vbd Een geval waarin het fout gaat: neem $f = |\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, door $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ de absolute waarde met $Y \subset \mathbb{R}$ als $Y = [0, \infty)$, dan met $x_0 = 0$. Er geldt voor $x \in Y - \{0\} = (0, \infty)$ dat $x > 0$ dus

$\frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{x - 0}{x - 0} = 1$, dus $x \mapsto \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}$ is constant op $(0, \infty)$

en gaat dus zeker naar 1 als $x \to 0$, $x \in (0, \infty)$ en volgt $(f|_Y)'(0) = 1$. $\Rightarrow$ $f|_Y$ diff.baar in 0

Anderzijds is f niet diff.baar in 0. Want voor $x < x_0$ geldt $\frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{-x}{x} = -1$, dus voor alle

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ en alle $\delta > 0$ geldt als $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ dan zou in het geval $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = L$

moeten gelden $|-1 - L| < \frac{1}{2}$ (voor $x_0 - \delta < x < x_0$) en $|1 - L| < \frac{1}{2}$ (voor $x_0 < x < x_0 + \delta$) en dat levert een contradictie op: voor $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\ x \neq x_0\ |x - x_0| < \delta \left| \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} - L \right| \geq \varepsilon$

$\square\square$

We zien het volgende gedrag: voor $x_0 \in Y \subset A$:

(i) $x_0 \in Y^\circ$: $(f|_Y)'(x_0) = f'(x_0)$ als een van de twee best.

(ii) $x_0 \notin Y^\circ$: (1) als $x_0 \in A^\circ$ kan dit fout gaan, zie $|\cdot|$ in 0

(2) wat als ook $x \notin A^\circ$?

(ii).(2) Helaas hier weer een tegenvoorbeeld in het algemene geval:

neem $f = 1_{\mathbb{Q}}$ de indicator functie. $1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
en neem $A = [0, 1]$ en $Y = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $x_0 = 0$

Dan volgt $(f|_Y)(x) = 1 \quad \forall x \in Y$ dus als
$x \in Y - \{x_0\} = \mathbb{Q} \cap (0,1]$ dan $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1-1}{x} = 0$
is constant dus zeker $(f|_Y)'(x_0) = 0$.

Maar als we f bekijken, nemen we de limiet door $(0,1]$
niet door $(0,1] \cap \mathbb{Q}$. Als $f'(x_0) = L$ zou bestaan, dan
betekent dat voor elke rij (a_n) met $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in [0,1] - \mathbb{Q}$
en $a_n \to 0$ als $n \to \infty$
dat $\lim_{n \to \infty} \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} = L$ maar $a_n \in (0,1] - \mathbb{Q}$
dus $f(a_n) = 0$
dus $L = \lim_{n \to \infty} \frac{0-1}{a_n}$ maar de rechterzijde
bestaat niet!
Kan het dan zijn dat er geen rij (a_n) in $(0,1] - \mathbb{Q}$ is
welke naar 0 conv? Nee, want wegens karakterisering
van limietpunten afsluitings geldt $0 \in \overline{(0, 1] - \mathbb{Q}} \iff$ er is
een rij (a_n) met $a_n \to 0$ als $n \to \infty$.
En $0 \in \overline{(0,1] - \mathbb{Q}}$. We hebben dus een tegenspraak
aangetoond d.m.v. de (existente) rij (a_n)

$\square$

We moeten dus voorzichtig zijn als we
het niet over intervallen hebben. Intervallen
gedragen zich daarentegen redelijk, z.o.z.

We komen eerst te spreken over een karakterisering van diff.baarheid die we ook wel "Newton-Approximatie" noemen.

Prop (Newton approximatie) $f: A \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in A$, x_0 limietpunt van A, dan TFAE:

(i) f diff.baar in x_0 met $f'(x_0) = L$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - \left(f(x_0) + L(x-x_0) \right) \right| \leq \varepsilon |x - x_0|$

N.B. er is dus een lineaire benadering $x \mapsto f(x_0) + L(x - x_0)$ die voor elke $\varepsilon > 0$ in een open δ-omgeving van x_0 een benadering geeft met fout in de orde van grootte $\varepsilon |x - x_0|$

(iii) er is een functie $u: A \to \mathbb{R}$ zodat
1) $\forall x \in A - \{x_0\} \quad f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(L + u(x))$
en $u(x_0) = 0$
2) u is continu in x_0, d.w.z. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} u(x) = u(x_0) = 0$

Bew. (i) $\Rightarrow$ (ii) : gegeven : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \ \ x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$|(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) - L| < \varepsilon$

neem $\varepsilon > 0$ will. Dan voor de gegeven δ uit bovenstaande formule hebben we voor alle $x \in A - \{x_0\}$ met $|x - x_0| < \delta$ dat $|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)| < \varepsilon |x - x_0|$ dus (zwakker)
$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \leq \varepsilon |x - x_0|$ en voor $x = x_0$ geldt $0 = |x - x_0| < \delta$ en $|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| = |f(x_0) - f(x_0) - L(x_0 - x_0)| = 0 \leq 0 = \varepsilon |x_0 - x_0|$ dus ook voor $x = x_0$ geldt $\overset{|x-x_0|<\delta}{\Rightarrow} |f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \leq \varepsilon |x - x_0|$.
Dus voor deze ε, δ geldt $\forall x \in A \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - (f(x) + L(x - x_0))| \leq \varepsilon |x - x_0|$

dus concluderen we $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \leq \varepsilon |x - x_0|$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : gegeven is $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \leq \varepsilon |x - x_0|$

neem nu $\varepsilon > 0$ will. Dan ook $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ dus er is een δ
zodat $\forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x - x_0|$
voor $\forall x \in A - \{x_0\}$ geldt dit dus ook. En omdat
voor $x \in A - \{x_0\}$ ook nog geldt : $\frac{\varepsilon}{2}|x - x_0| < \varepsilon |x - x_0|$
want $0 < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ en $0 < |x - x_0|$, volgt

$\forall x \in A - \{x_0\} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) - L(x_0 - x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x - x_0| < \varepsilon |x - x_0|$
delen we aan beide zijden door $|x - x_0| > 0$, dan volgt dus
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in A - \{x_0\} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| < \varepsilon$

hetgeen precies $f'(x_0) = L$ is.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) : gegeven $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$

Definieer $u : A \to \mathbb{R}$ door $u(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L & , x \neq x_0 \\ 0 & , x = x_0 \end{cases}$

dan voldoet u aan 1), want voor $x \neq x_0$ volgt
$u(x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0) - L$ dus
$u(x)(x - x_0) + L(x - x_0) = f(x) - f(x_0) \Rightarrow$
$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(u(x) + L)$ voor $x \in A$, $x \neq x_0$
en als $x = x_0$ dan $f(x) - f(x_0) = 0 = 0 \cdot (0 + L)$
dus voor alle $x \in A$ geldt 1). $= (x - x_0)(u(x) + L)$

en u voldoet aan 2) want $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$
en $x \mapsto L$ is constante functie, dus conv.
dus we kunnen deze $-L$ in de limiet nemen:
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} u(x) = 0 = u(x_0)$

maar voor alle $\varepsilon > 0$ geldt $x = x_0$ dan $u(x) = 0$
dus $|u(x) - 0| < \varepsilon$ dus we kunnen de limiet nu ook
door A nemen : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} u(x) = 0 = u(x_0)$ dat is 2).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : dit is eenvoudiger dan (iii) $\Rightarrow$ (i) en omdat "(ii) $\Rightarrow$ (i)" reeds bewezen was is dit voldoende om het bewijs rond te maken.

Stel voor een $L \in \mathbb{R}$ is er een $u : A \to \mathbb{R}$ met

1) $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(u(x) + L)$, $\forall x \in A$

en $u(x_0) = 0$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} u(x) = u(x_0)$.

Dan geldt dus $\forall x \in A$ $f(x) - f(x_0) - L(x - x_0) = (x - x_0)u(x)$

dus volgt $\forall x \in A$ $|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| = |x - x_0||u(x)|$

neem nu $\varepsilon > 0$. Dan is er wegens $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} u(x) = 0$

een $\delta > 0$ met $\forall x \in A$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |u(x)| < \varepsilon$

maar dan voor $x \in A$, $|x - x_0| < \delta$ volgt óók

$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| = |u(x)||x - x_0| \leq \varepsilon|x - x_0|$

de $\leq$ volgt omdat: als $x \neq x_0$ dan

$0 \leq |u(x)| < \varepsilon$ en $|x - x_0| > 0$ dus $|u(x)||x - x_0| \leq \varepsilon|x - x_0|$

en als $x = x_0$ dan $|u(x)| = 0$ en dus $|u(x)||x - x_0| = 0 \leq \varepsilon|0|$

$= \varepsilon|x - x_0|$.

dit voltooit (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\square$

De functie u blijkt een handig hulpmiddel in het bewijs van o.a. de kettingregel.

6.1.5 (Opgave) (i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = c$ is diff.baar in $x_0 \in \mathbb{R}$ voor alle $x_0 \in \mathbb{R}$ en $f'(x_0) = 0$ voor alle $x_0 \in \mathbb{R}$

ii) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g(x) = x$ is diff.baar in $x_0 \in \mathbb{R}$ voor alle $x_0 \in \mathbb{R}$ en $g'(x_0) = 1$ voor alle $x_0 \in \mathbb{R}$

Bew. (i) voor will. $x_0 \in \mathbb{R}$ geldt voor will. $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ dat

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

dit is een constante functie op $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ dus de limiet naar x_0 bestaat en is 0 (H5)

(ii) voor will. $x_0 \in \mathbb{R}$ geldt voor will $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ dat

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Dat is wederom een constante functie op $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ en dus is de limiet naar x_0 precies 1.

$\square$

(Corrolarium) zij $f: A \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in A$ en x_0 limietpunt van A. Dan wanneer f diff.baar is in A, is f continu in A.

Bew Er zijn twee manieren: vanuit de definitie weten we:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ bestaat en is $f'(x_0)$

Verder weten we $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} x - x_0 = 0$ want $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} x - x_0 = 0$ en $x \in A$ dus $x \in \overline{A - \{x_0\}}$ is limietpunt.

tenslotte geldt voor $x \in A - \{x_0\}$ dat $f(x) - f(x_0) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \cdot (x - x_0)$ dus we hebben (H5): dat $x \mapsto (f(x) - f(x_0))$ conv. als $x \to x_0$ door $A - \{x_0\}$, en:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} f(x) - f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$= \underbrace{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0) \text{ best.}} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} (x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

omdat $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} f(x_0) = f(x_0)$ volgt $\Rightarrow \lim_{x \to x} f(x) = f(x_0)$ dus f ctn. in x $\square$

Som –, Product –, Quotiëntregel voor differentiëren

St. $f: A \to \mathbb{R}$ $g: A \to \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R})$ $x_0 \in A$ lim. punt v. A
en neem f, g diff.baar in x_0. Dan:

(i) $af + bg : A \to \mathbb{R}$ door $x \mapsto a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$
diffbaar in x_0 met $(af+bg)'(x_0) = a \cdot f'(x_0) + b \cdot g'(x_0)$

(ii) $(f \cdot g) : A \to \mathbb{R}$ door $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ diff.baar in x_0
met $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(iii) als $\forall x \in A$ $g(x) \neq 0$. Dan is $\left(\frac{f}{g}\right) : A \to \mathbb{R}$
diff.baar in x_0 en $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Bew (i) we bewijzen twee eenvoudige gevallen, $b=0$ en $a=b=1$
en hieruit volgt de rest.

Stel $f: A \to \mathbb{R}$ diff.baar in x_0. Dan is er dus een
$L = f'(x_0)$, $u: A \to \mathbb{R}$ met $\forall x \in A$ $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)(u(x)+L)$
en $u(x_0) = 0$ en $\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$
Dan volgt voor een $a \in \mathbb{R}$ vast dat $a \cdot f(x) - a \cdot f(x_0)$
$= a(f(x) - f(x_0)) = a(x-x_0)(u(x)-L) = (x-x_0)(a \cdot u(x) - a \cdot L)$
Bekijk dan de functie $a \cdot u : A \to \mathbb{R}$. Uit H5 volgt
dat voor u continu in x_0 ook $a \cdot u$ voor $a \in \mathbb{R}$
continu in x_0 is. En $a \cdot u(x_0) = a \cdot 0 = 0$. Dus voor
$M = aL \in \mathbb{R}$ en $v = a \cdot u : A \to \mathbb{R}$ volgt dat $(v(x) - M)(x-x_0) = (af)(x) - (af)(x_0)$
voor alle $x \in A$ en dat $v(x_0) = 0$ en dat v continu in x_0 is.
Dus volgt dat af diff.baar is in x_0 met
$(af)'(x_0) = M = aL = a \cdot f'(x_0)$

Voor $f+g$: dan waren er dus $u, v: A \to \mathbb{R}$ em $L, M \in \mathbb{R}$
met $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)(u(x)+L)$, $u(x) \to u(x_0) = 0$ als $x \to x_0$
en $g(x) - g(x_0) = (x-x_0)(v(x)+M)$, $v(x) \to v(x_0) = 0$ als $x \to x_0$

Maar dan $(f+g)(x) - (f+g)(x_0) = f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)$
$= (x-x_0)(u(x)+L) + (x-x_0)(v(x)+M) = (x-x_0)((u+v)(x) - (L+M))$

en nu hangen we de rest weer op aan continuïteit van sommen van continue functies: $u+v$ ctn. in x_0 want u, v zijn dat in x_0 en $(u+v)(x_0) = u(x_0)+v(x_0) = 0+0 = 0$

dus voor $w = u+v$, $K = L+M$ staat er $\forall x \in A$

$(f+g)(x) - (f+g)(x_0) = (x-x_0)(w(x)+K)$, $w(x) \xrightarrow{\text{als } x \to x_0} w(x_0) = 0$

dus volgt $f+g$ diff.baar met $(f+g)'(x_0) = K = L+M$
$= f'(x_0)+g'(x_0)$.

(ii) $(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(x_0) = f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)$
$= f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)$
$= g(x_0)(f(x)-f(x_0)) + (g(x)-g(x_0))f(x)$

$= g(x_0)(x-x_0)(u(x)+L) + f(x)(x-x_0)(v(x)+M)$

voor $u, v : A \to \mathbb{R}$ continu in x_0 met $v(x_0) = u(x_0) = 0$

en $f'(x_0) = L$, $g'(x_0) = M$.

$= (x-x_0)(g(x_0)\cdot u(x) + f(x)v(x) + (g(x_0)L + f(x)M))$

dit is nog niet de gewenste vorm: we willen een continue functie die naar 0 gaat als $x \to x_0$ en continu is in 0, en een constante. Voeg $\pm f(x_0)M$ toe:

$= (x-x_0)([g(x_0)\cdot u(x) + f(x)v(x) + f(x)M - f(x_0)M]$
$+ (g(x_0)L + f(x_0)M))$

we hebben nu dat $x \mapsto u(x)$ continu in x_0 is met waarde 0, dat dus ook $x \mapsto g(x_0)u(x)$ cont. in x_0 is met waarde 0. en evenzo voor $x \mapsto v(x)$, en omdat f diff.baar is in x_0 is f ctn in x_0 dus $f\cdot v$ is continu in x_0 en $(f\cdot v)(x_0) = f(x_0)\cdot v(x_0) = 0$

dus volgt nu dat $x \mapsto g(x_0)u(x) + f(x)v(x)$ continu in x_0 is met waarde 0. Dan weten we nu ten slotte dat

$x \mapsto f(x)M - f(x_0)M = (f(x)-f(x_0))\cdot M$ continu is omdat $f(x)$ dat is en $x \mapsto f(x_0)$ const. ook, dus $f(x) - f(x_0)$ ook met limiet 0 want $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0)$ en dus is $x \mapsto f(x)M - f(x_0)M$ continu met limiet 0.

Dus is $x \mapsto g(x_0)u(x) + f(x)v(x) + f(x)M - f(x_0)M$; $A \to \mathbb{R}$ continu in x_0 met waarde $0+0 = 0$.

en $g(x_0)L + f(x_0)M$ is dus precies de constante $(fg)'(x_0)$ waaruit volgt $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$

(iii) We bewijzen het geval $f \equiv 1$. Het algemene geval volgt hieruit middels de productregel in (ii).

te bewijzen: $g : A \to \mathbb{R}$ diffbaar in $x_0 \in A$, dan als $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A$ dan volgt $\frac{1}{g} : A \to \mathbb{R}$ diff.baar in x_0 en $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

we hebben dat $g(x) - g(x_0) = (x - x_0)(u(x) + L)$ voor $L = g'(x_0)$ en $u : A \to \mathbb{R}$ een (in x_0 continue) functie met $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} u(x) = u(x_0) = 0$. Dan volgt nu

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} = (x - x_0)\left(\frac{-u(x)}{g(x)g(x_0)} + \frac{-L}{g(x)g(x_0)}\right)$$

$$= (x - x_0)\left(\left(\frac{-u(x)}{g(x)g(x_0)} + \frac{-L}{g(x)g(x_0)} + \underbrace{\frac{L}{g(x_0)^2}\Bigg]\right) + \frac{-L}{g(x_0)^2}}_{\text{toevoegen}}\right)$$

als we kunnen aantonen dat

$v : x \mapsto \frac{-u(x) - L}{g(x)g(x_0)} + \frac{L}{g(x_0)^2}$ continu is in x_0 met waarde 0

zijn we klaar. We zien in elk geval $v(x_0) = \frac{-u(x_0) - L}{g(x_0)^2} + \frac{L}{g(x_0)^2}$

$= -0/g(x_0)^2 - L/g(x_0)^2 + L/g(x_0)^2 = 0$ dus waarde voldoet.

verder weten we dat g ctn. in x_0 is omdat g diffbaar in x_0 is, en dus is (omdat u ctn. is in x_0) ook $x \mapsto u(x_0)/g(x)$ ctn in x_0 en zo ook $x \mapsto 1/g(x)$ in x_0 en dus ook de lineaire combinatie van de twee $\frac{1}{g(x_0)} \cdot \left(\frac{u}{g}\right) + \frac{-L}{g(x_0)} \cdot \left(\frac{1}{g}\right)$ ctn is en ook de constante functie $x \mapsto \frac{L}{g(x_0)^2}$ dus ook de som $x \mapsto \frac{-u(x) - L}{g(x)g(x_0)} + \frac{L}{g(x_0)} = v(x)$ dus v is continu in x_0

$\Longrightarrow$ wegens karakterisering diff.bare functies als die functies waarvoor constante $C \in \mathbb{R}$ en $v : A \to \mathbb{R}$ continu in x_0 met $v(x_0) = 0$ bestaan zodat

$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(v(x) + C)$, volgt dat $\frac{1}{g}$ diff baar in in x_0 met $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -g'(x_0)/g(x_0)^2$ $\square$

KETTINGREGEL

6.1.11 (K. regel) $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ x_0 limietpunt van A
en f diff.baar in x_0.
Neem $g: B \to \mathbb{R}$, $f(A) \subset B$ en $y_0 = f(x_0)$
limietpunt van B (merk op $f(x_0) \in f(A) \subset B$ al)
en dat g diffbaar is in y_0. Dan is
$g \circ f: A \to \mathbb{R}$ diffbaar in x_0 en

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Bew. er zijn dus weer u, v functies $A \to \mathbb{R}$, $B \to \mathbb{R}$
en $g'(y_0) = M$, $f'(x_0) = L$ zodat $v(y) \to v(y_0) = 0$ als $y \to y_0$
$u(x) \to u(x_0) = 0$ als $x \to x_0$.

en: $\forall y \in B \quad g(y) - g(y_0) = (y - y_0)(v(y) + M)$
$\forall x \in A \quad f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(u(x) + L)$

voor alle $x \in A$ geldt $f(x) \in B$ dus

$$\forall x \in A \quad g(f(x)) - g(f(x_0)) = \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{\text{! herkenbaar}}(v(f(x)) + M)$$

$$= (x - x_0)(u(x) + L)(v(f(x)) + M)$$
$$= (x - x_0)(u(x)v(f(x)) + L \cdot v(f(x)) - M \cdot u(x) + LM)$$

en $x \mapsto f(x)$ is continu in x_0 want f is diff.baar in x_0,
dus de samenstelling $v \circ f: A \to \mathbb{R}$ is continu
in x_0 want v is ctn in $f(x_0)$ (zie H.5, Ex. 5.1.13)
u is ook continu in x_0, dus dan:
maar dan is het product $u \cdot (v \circ f): A \to \mathbb{R}$ door $x \mapsto u(x)v(f(x))$
ook continu in x_0 en de lineaire combinatie $(u \cdot (v \circ f)) + L \cdot (v \circ f)$
ook in x_0 en u: ook continu dus $-Mu$ ook, dus
is $w = u \cdot (v \circ f) + L \cdot (v \circ f) - M \cdot u$ continu in x_0.
Hiermee, en met het feit dat $w(x_0) =$
$u(x_0) \cdot v(f(x_0)) + L v(f(x_0)) - M u(x_0) = 0 \cdot 0 + L \cdot 0 - M \cdot 0 = 0$

volgt dat $g \circ f$ diffbaar is in x_0 met $(g \circ f)'(x_0) = LM = g'(y_0) f'(x_0)$ □

Stelling ~~toepassing~~: g neemt zijn max. en min aan. maar als $g(x) > g(a)$ dan moet g ergens anders dan in a of b zijn max. aannemen en als $g(x) < g(a)$ dan moet g zijn min ergens anders aannemen dan in a of b.
Zij x_0 dus die plek anders dan a of b waar g een extremum heeft. Omdat $x_0 \in (a,b)$ dus i.h. inwendige van $[a,b]$ ligt, en een minimum/maximum ook een lokaal min/max is, volgt $g'(x_0) = 0$ (immers is g diff.baar in $x_0 \in (a,b)$) $\square$

6.2.5 (Middelwaardestelling) (Een soort gevolg van Rolle's) $a<b$,

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diff.baar op (a,b), continu op $[a,b]$.
Dan

$$\exists c \in (a,b) \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

<u>Bew</u> We doen dit door het terug te voeren tot Rolle's stelling: bekijk
$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ door:

$$g(x) := f(x) - \Big(\underbrace{-f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)}_{\text{dit is de lijn door } (a,f(a)),\,(b,f(b))}\Big)$$

dan volgt namelijk $g(a) = 0$, $g(b) = 0$
En de lijn door $(a, f(a)), (b, f(b))$ is lineair in x dus continu en diffbaar op $[a,b]$ en dus de lineaire combinatie $g = f - \ell$ ook. Dus volgt wegens rolle dat

er een $c \in (a,b)$ is met $0 = g'(c)$ en met de somregel is dit $0 = f'(c) - \left(-0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 1\right) = f'(c) + -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\Longrightarrow f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a)$$

$\square$

Opm ik heb nog geen bewijs gegeven van :
$f : A \to \mathbb{R}$ continu in $x_0 \in A$, $g : B \to \mathbb{R}$ met $f(A) \subset B$
continu in $f(x_0)$ $\Longrightarrow$ $(g \circ f) : A \to \mathbb{R}$ continu in x_0.

Bewijs : gegeven zijn: $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon' > 0 \ \exists \delta' > 0 \ \forall y \in B \quad |y - f(x_0)| < \delta' \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon' \end{cases}$

kies nu $\varepsilon > 0$ will. Dan is er een $\delta' > 0$ waarvoor
$\forall y \in B \quad |y - f(x_0)| < \delta' \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$.
Dan $\delta' > 0$ dus er is een $\delta'' > 0$ met
$\forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta'' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta''$

dus bekijk deze $\delta'' > 0$: er geldt voor will $x \in A$ dat:
als $|x - x_0| < \delta''$, dan $|f(x) - f(x_0)| < \delta'$, dus per keuze van δ' :
$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$, dus voor deze δ'' :

$\forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta'' \Longrightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon$
oftewel $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0)$ $\square$

Short & simple.

6.2 Afgeleide & extreme waarden

Def. $f : A \to \mathbb{R}$ wordt gezegd een lokaal max. (min) in $x_0 \in A$ te hebben als
$\exists \delta > 0 \ \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \leq f(x_0)$ $(\geq)$
oftewel $\exists \delta > 0 \ \forall x \in A \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(x_0)$

Prop voor $x_0 \in A^\circ$, f diff. baar in x_0 en f neemt een lokaal max. / min aan in x_0, dan $f'(x_0) = 0$

Bew we weten $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$

en er is een $\delta > 0$ zodat $(x - \delta_0, x + \delta_0) \subset A$

die convergeert naar x_0

neem nu een rij (a_n) met $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in (x_0 - \delta, x_0)$
bijvoorbeeld $(a_n) = (x_0 - \frac{1}{n})_{n=N}^{\infty}$ met $\frac{1}{N} < \delta_0$
Dan $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A - \{x_0\}$, dus $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} = L$
maar ook $a_n < x_0$ en $f(a_n) \geq f(x_0)$
en dus $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \leq 0$ $\Rightarrow L \leq 0$

neem nu een andere rij (a_n) convergent naar x_0 met
$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in (x_0, x_0 + \delta)$ zoals $(x_0 + \frac{1}{n})_{n=N}^{\infty}$ met $\frac{1}{N} < \delta_0$.
Dan $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A - \{x_0\}$, dus $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} = L$
maar ook $a_n > x_0$ en $f(a_n) \geq f(x_0)$
en dus $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \geq 0$ $\Rightarrow L \geq 0$

dus $L = 0$ $\Longrightarrow$ $f'(x_0) = 0$
Analoog voor $f(x) \leq f(x_0)$, of door overvoeren op $-f$
diff.baar met lokaal max. in x_0 $\square$.

Def f heet diff.baar als $\forall x_0 \in A$ f diff.baar in x_0 is.
Omdat de afgeleide $f'(x_0)$ uniek afhangt van x_0,
definiëren we de afgeleide als functie $f' : A \to \mathbb{R}$
(Als f niet overal in A diff.baar is, maar wel in $B \subset A$,
kunnen we altijd nog $f' : B \to \mathbb{R}$ definiëren).

St. (St. van Rolle) $a<b$ $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, of eigenlijk
elke $g : I \to \mathbb{R}$ waar I rijcompact en verbonden is
(in $\mathbb{R}$ intervallen) (die begrensd zijn)
en g is continu (op $[a,b]$ dus) en diff.baar
op (a,b). Als $g(a) = g(b)$, dan

$$\exists c \in (a,b) \quad g'(c) = 0.$$

Bew. Als g constant is zijn we klaar want dan is $g'(c) = 0$
overal op (a,b) (voorgaande opgave).
Anders is er een $x \in (a,b)$ met $g(x) \neq g(a) = g(b)$
Omdat g continu is en $[a,b]$ interval is de

6.2.6 (Gegeneraliseerde Middelwaardestelling) $a<b$

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu op $[a,b]$ en diff.baar op (a,b) en • $g(a) \neq g(b)$ en • $g'(x) \neq 0$ voor $\forall x \in [a,b)$. Dan

$$\exists c \in (a,b) \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(speciaal geval $g(x) = x$)

Bew. Een fout bewijs: pas middelw.st. toe op f, g apart en concludeer $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \frac{b-a}{g(b)-g(a)} = f'(c) \cdot \frac{1}{g'(c)}$

Want we vinden wel een c voor f en een d voor g zodat dit geldt, maar dan hoeft nog niet $c=d$ te gelden!

We reduceren wederom direct tot "Rolle" op een manier die veel lijkt op de "lijnmethode" uit Middelw.st.

Zij $h: [a,b] \to \mathbb{R}$ door
$$h(x) = [g(x)-g(b)][f(a)-f(b)] - [f(x)-f(b)][g(a)-g(b)]$$

Dan is h diff. in elke $x_0 \in (a,b)$ want het is een lineaire combinatie van g, f en een constante functie. Bovendien $h(a) = 0 = h(b)$ dus er is een $c \in (a,b)$ met $h'(c) = 0$, wat ons geeft dat

$$g'(c)[f(a)-f(b)] - f'(c)[g(a)-g(b)] = 0$$

oftewel, omdat $g'(c) \neq 0$, $g(a)-g(b) \neq 0$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$\square$

Opm als we de voorwaarde $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$ of $g(a) \neq g(b)$ laten vallen, dan geldt nog steeds

$$\exists\, c \in [a,b) \qquad f'(c)\,[g(b)-g(a)] = g'(c)\,[f(b)-f(a)]$$

— Belangrijke gevolgen van de gég. midst. zijn de "regels van l'Hôpital":

St (Corrolarium) (l'Hôpital) : $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ continu en diffbaar (in (a,b) dus). zij $x_0 \in (a,b)$ en neem aan $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ en $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Dan: $\displaystyle \lim_{x \to x_0,\ x \in (a,b)\setminus\{x_0\}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (a,b)-\{x_0\}}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Bew. merk als eerste op dat uit $x_0 \in (a,b)$, $\forall x \in (a,b)\ g'(x) \neq 0$ en $g(x_0)=0$ volgt dat $\forall x \in (a,b) \quad g(x) \neq 0$.

Immers als $\exists x \in (a,b) \quad g(x) = 0$ dan passen we "Rolle" toe op $g\rfloor_{[x,x_0]}$ of $g\rfloor_{[x_0,x]}$ al naar gelang $x < x_0$ of $x > x_0$ ($x \neq x_0$ want $g(x_0) \neq 0$) en arriveren we bij: er is een $x' \in [x_0,x]$ of $[x,x_0] \subset (a,b)$ met $g'(x') = 0$ contradictie met de aanname.

We kunnen dus delen door $g(x)$ voor will. $x \in (a,b)$ dus we passen de middelwaardestelling toe op will. $x \in (a,b)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

voor een $c \in (x, x_0)$ of $c \in (x_0, x)$

al naar gelang $x < x_0$ of $x > x_0$.

Met $\displaystyle \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (a,b)-\{x_0\}}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ volgt per definitie

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall c \in (a,b) - \{x_0\} \quad |c - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \varepsilon$$

neem $\varepsilon > 0$ will en de daarbij horende δ zoals hierboven.
Dan voor $x \in (a,b) - \{x_0\}$ willekeurig geldt:

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ voor een c tussen x en x_0,
dus ofwel $(-\delta + x_0) < x < c < x_0$
ofwel $x_0 < c < x < x_0 + \delta$

in beide gevallen $-\delta < c - x_0 < \delta$ en $c \neq x_0$, dus
$c \in (a,b) - \{x_0\}$, $|c - x_0| < \delta$. Maar dan volgt juist
$\left| \dfrac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \varepsilon$ en dus concluderen we

$$\forall x \in (a,b) - \{x_0\} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \varepsilon$$

dat bewijst: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (a,b) - \{x_0\}}} f(x) / g(x) = L$ $\square$

6.3 Inverse functiestelling

St 6-3.1 $f : A \to B$ bijectief met inverse functie $f : B \to A$ waar $A, B \subset \mathbb{R}$. Zij $x_0 \in A$ limietpunt van A en zij f diff.baar in x_0 met $f'(x_0) \neq 0$. Zij $y_0 = f(x_0)$ en neem aan dat f^{-1} continu is in y_0

→ Dan is f^{-1} <u>diff.baar</u> in $y_0 = f(x_0)$ en bovendien

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$$

<u>Bew</u> We moeten aantonen dat
$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in B - \{y_0\}}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$
bestaat en gelijk is aan $1/f'(x_0)$. Dit doen we als volgt: voor $y \in B - \{y_0\}$ is
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{y - f(x_0)}$$

— Let op, we moeten <u>ook</u> aantonen dat y_0 een limietpunt van B is: dit volgt wegens continuïteit van f: want x_0 is limpunt van A, dus er is een rij $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ met $x_n \to x_0$ als $n \to \infty$ en $x_n \neq x_0$ $\forall n \geq 1$ maar dan geeft dit een rij $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ met $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$ als $n \to \infty$ en $f(x_n) \neq f(x_0)$ $\forall n \geq 1$ omdat f injectief is. Dus we zien dat y_0 de limiet is van een rij in $B - \{y_0\}$ en dus limietpunt is.

Zij $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ nu een willek. rij met $y_n \to y_0$ als $n \to \infty$ en $y_n \in B - \{y_0\}$. Als voor al deze rijen geldt dat de rij $\left(\frac{f^{-1}(y_n) - x_0}{y_n - f(x_0)} \right)_{n=1}^{\infty}$ conv. is naar L, dan is bewezen
$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in B - \{y_0\}}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = L.$$

We zien dit als volgt in: voor elke y_n geldt $y_n = f(x_n)$ voor een unieke $x_n \in A$ wegens bijectiviteit van f en bovendien $x_n \neq x_0$ want $y_n \neq y_0$ en f is injectief.

schrijf dus $(y_n)_{n=1}^{\infty} = (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ voor $x_n = f^{-1}(y_n)$

omdat $y_n \to y_0$ als $n \to \infty$ en $f^{-1}(\cdot)$ is continu volgt $x_n \to f^{-1}(y_0) = x_0$ als $n \to \infty$

Dus schrijf

$$\frac{f^{-1}(y_n) - x_0}{y_n - f(x_0)} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}$$

want voor elke n is $f(x_n) \neq f(x_0)$ en $x_n \neq x_0$

Bovendien als $n \to \infty$ gaat $y_n \to y_0$ dus $x_n \to f^{-1}(y_0) = x_0$ en $f(x_n) \to f(x_0)$ dus we kunnen toepassen dat deze limieten geven:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}$$

en dit is $\frac{1}{f'(x_0)}$ want $x_n \to x_0$ als $n \to \infty$. $\square$

6.4 Hogere-orde afgeleiden en Taylorbenadering

Def $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$. Veronderstel f heeft afgeleiden t/m orde n, dwz afgeleiden $f', f'', \ldots f^{(n)}$ bestaan t/m $n \in \mathbb{N}$ als functies op (a,b)

intermezzo: als de functie $f: A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}$ diff baar is en dus overal op A de afgeleide bestaat, en $f': A \to \mathbb{R}$ heeft ook overal op A weer een afgeleide, dan heeft f afgeleiden van orde 2 en we schrijven $(f')' = f''$, en i.h.a $(f^{(n)})' = f^{(n+1)}$.

Dan definiëren we het Taylorpolynoom van graad n voor f in $c \in (a,b)$ als:

$$T_n(x; c, f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

St. (Taylorbenadering) Stel $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ en f heeft afgeleiden t/m orde $n+1\in\mathbb{N}$.
en
$\forall x\in(a,b)\ f(x) = T_n(x;f,c) + E_n(x)$, $E_n:(a,b)\to\mathbb{R}$

dan geldt voor elke $\forall p\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ $\exists t\in(x,c)$ of (c,x)

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!\ p}(x-c)^p(x-t)^{n+1-p}$$

Het geval $p=n+1$ geeft de "Lagrange"-vorm van de restterm: $\exists t\in(x,c)$ of (c,x)

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Bew Stel $F(c) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ $\qquad$ <u>x is nu vast (maar will.)</u>

We zien $\begin{cases} F(c) = T_n(x) \\ F(x) = f(x) \end{cases}$, dus

$$\Longrightarrow F(x) - F(c) = f(x) - T_n(x) = E_n(x)$$

We bekijken het taylorpolynoom dus (bij F) als functie van c.
Omdat F een som van producten van polynomen met afgeleiden van f is, maar de hoogste orde afgeleide van f in F van orde n is, volgt dat F differentieerbaar is in elke $c\in(a,b)$ en

$$F'(c) = f'(c) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k + -k\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{k-1}\right)$$

$$= f'(c) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(x-c)^{k-1}$$

$$= f'(c) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

alle termen behalve één vallen weg.

We weten nu dus $F(x) - F(c) = E_n(x)$ en
$F'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$ voor will. $c \in (a,b)$

Wegens de middelwaardestelling, als $x \neq c$, is er
een t tussen x en c zodat

$$\frac{F(x) - F(c)}{x-c} = F'(t)$$

en ook als $x = c$ dan geldt nog steeds iha

$F(x) - F(c) = F'(t)(x-c)$ voor zekere t tussen x en c.

$$\Rightarrow \quad E_n(x) = F(x) - F(c) = F'(t)(x-c)$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-c)^{n+1}$$

Zoals te zien is dit een nog te grove afschatting (de Lagrange-rest is een factor $\frac{1}{n+1}$ kleiner.)

We maken een betere afschatting met de veralg. middelwaardestelling: voor $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbaar gold th.a. dat voor $x, c \in (a,b)$ er een t tussen x en c was met

$$\big(G(x) - G(c)\big) F'(t) = \big(F(x) - F(c)\big) G'(t)$$

dit gold zelfs wanneer $G(x) = G(c)$ of $F(x) = F(c)$ want we delen nergens. We moeten nu nog G zorgvuldig kiezen. Een idee is $G(y) = (x-y)^p$ voor een $p \geq 1$. Dit geeft: $G'(y) = -p(x-y)^{p-1}$

dus:

$$\big((x-x)^p - (x-c)^p\big) \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n = E_n(x) \cdot -p(x-t)^{p-1}$$

aangezien $t \neq x$ want t tussen x en c strikt

$\Leftrightarrow$ deel door $-p(x-t)^{p-1} \neq 0$:

$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!\,p}(x-t)^{n+1-p}(x-c)^p = E_n(x)$$

Benadering van Taylor en Ordes van Landau.

6.4.2 (Gevolg van Taylor's benadering)

Stel $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heeft afgeleiden t/m orde $n+1 \in \mathbb{N}$
en dat $f^{(n+1)} : (a,b) \to \mathbb{R}$ begrensd is door $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
Dan
$$\forall x \in (a,b) \quad |f(x) - T_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-c|^{n+1}$$

Bew. we weten $|f(x) - T_n(x)| = |E_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} \right|$

en $|f^{n+1}(t)| \leq M$, $|(x-t)^{n+1}| \leq |x-c|^{n+1}$
want t ligt tussen x en c en de afstand
wordt dus gemaximaliseerd wanneer t zo dicht mogelijk
c is genaderd (want zo ver mogelijk weg van x)

dus volgt de uitspraak met de simpele opmerking dat
alle factoren $0 \leq$ zijn en dus mogen we
ongelijkheden substitueren $\square$

Def we zeggen, voor $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ met $c \in (a,b)$
dat "$f = \mathcal{O}(g)$ als $x \to c$" wanneer geldt

$$\exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ \exists \delta > 0 \ \underset{\forall x \in (a,b)}{} \ \underset{0<|x-c|<\delta}{\Rightarrow} |f(x)| \leq M |g(x)|$$ $\square$

we kunnen dus (6.4.2) schrijven als

$$f(x) - T_n(x; f, c) = \mathcal{O}((x-c)^{n+1}) \quad \text{als } x \to c$$

(Opgave)

(i) Als $f_1(x) = \mathcal{O}(g_1(x))$, $f_2(x) = \mathcal{O}(g_2(x))$ als $x \to c$
dan volgt $f_1(x) f_2(x) = \mathcal{O}(g_1(x) g_2(x))$ als $x \to c$

<u>Bewijs</u> $\exists M_1, M_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en $\delta_1, \delta_2 > 0$ zodat
$x \in (a,b)$ $0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x)| \leq M_1 |g_1(x)|$
$0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x)| \leq M_2 |g_2(x)|$

kies $M = M_1 M_2 \geq 0$ en $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$

dan wanneer $x \in (a,b)$ will. volgt:

$0 < |x-c| < \delta$ dan $0 < |x-c| < \delta_1$ zodat $|f_1(x)| \leq M_1 |g_1(x)|$

en dus $|f_1(x) f_2(x)| = |f_1(x)| \cdot |f_2(x)| \leq$

$|f_2(x)| \cdot M_1 |g_1(x)|$ en $0 < |x-c| < \delta \leq \delta_2$ zodat $|f_2(x)| \leq M_2 |g_2(x)|$

zodat $|f_2(x)| \cdot M_1 |g_1(x)| \leq M_1 M_2 |g_1(x)||g_2(x)|$

$= M |g_1(x) g_2(x)|$

dus voor $\forall x \in (a,b)$ $0 < |x-c| < \delta$ $|f_1(x) f_2(x)| \leq M |g_1(x) g_2(x)|$

dus $f_1(x) f_2(x) = \mathcal{O}(g_1(x) g_2(x))$

$\square$

(ii) $f_1(x) = \mathcal{O}(g(x))$, $f_2(x) = \mathcal{O}(g(x))$ als $x \to c$

dan $(f_1 + f_2)(x) = \mathcal{O}(g(x))$

Bew. we hebben $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en $\delta_1, \delta_2 > 0$

zodat $\forall x \in (a,b)$ $0 < |x-c| < \delta_1$ $|f_1(x)| \leq M_1 |g(x)|$

$0 < |x-c| < \delta_2$ $|f_2(x)| \leq M_2 |g(x)|$

neem $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, dan met

$M = M_1 + M_2$ geldt: als $x \in (a,b)$

en $0 < |x-c| < \delta$ dan volgt $0 < |x-c| < \delta_1$ dus $|f_1(x)| \leq M_1 |g(x)|$

en volgt $0 < |x-c| < \delta_2$ dus $|f_2(x)| \leq M_2 |g(x)|$

dus $(f_1 + f_2)(x) \leq (M_1 + M_2)|g(x)| = M|g(x)|$

dus $(f_1 + f_2)(x) = \mathcal{O}(g(x))$ als $x \to c$.

$\square$

Opm — Als $f_1(x) = \mathcal{O}(g_1(x))$ $f_2(x) = \mathcal{O}(g_2(x))$ als $x \to c$

wij $g = \max(g_1, g_2) : (a,b) \to \mathbb{R}$ door

$g(x) = \max\{g_1(x), g_2(x)\}$ voor $x \in \mathbb{R}$

dan voor $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ geldt weer:

als $0 < |x-c| < \delta$ dan $|f_1(x)| \leq M_1 |g_1(x)| \leq M_1 |g(x)|$

$|f_2(x)| \leq M_2 |g_2(x)| \leq M_2 |g(x)|$

en dus $|(f_1 + f_2)(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)|$

$\leq (M_1 + M_2)|g(x)|$

dus $(f_1 + f_2)(x) = \mathcal{O}(\max(g_1, g_2)(x))$ als $x \to c$

$\square$