CH5 Reële functies , functies $A \to \mathbb{R}$ meestal $A \subset \mathbb{R}$

Def $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. We zeggen dat, voor

$E \subset A$, $x_0 \in \overline{E}$, dat f naar L convergeert in x_0 door E als

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Notatie $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = L$ en als $E = A$, kortweg: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

Vb als $x_0 \in A$ en $E = \{x_0\}$, dan $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0)$ triviaal.

als $x_0 \notin A$ dan voor $E = \{x_0\}$ is de definitie niet van toepassing want $E \not\subset A$.

$\forall E \subset A$.

Lemma Voor $\forall \delta_0 > 0$: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = L \iff \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)}} f(x) = L$

Bew (Opgave) "$\Rightarrow$"

We moeten eerst aantonen dat als $E \subset A$, $x_0 \in \overline{E}$, dan voor elke $\delta_0 > 0$ will. geldt $x_0 \in \overline{E \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)}$

Dit gaat als volgt: we weten $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

en $x_0 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subset (x_0 + \delta_0, x_0 + \delta_0)$ dus

$x_0 \in \overline{E} \cap \overline{(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)} = \overline{E \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)}$

Verder $E \subset A$ dus $E \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subset E \subset A$

dus de limiet rechts is welgedefinieerd.

neem $\varepsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ uit de definitie links, en voor $x \in E \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ volgt $x \in E$ dus $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Dit was te bewijzen. We vinden als δ dezelfde δ als links.

"$\Leftarrow$" als $x_0 \in \overline{E \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)}$ dan : $\overline{E \cap N_{\delta_0}(x_0)}$ $= \overline{E} \cap \overline{N_{\delta_0}(x_0)}$

dus $x_0 \in \overline{E} \wedge x_0 \in \overline{(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)} \Rightarrow x_0 \in \overline{E}$

Zij nu $\varepsilon > 0$ will. Dan is er een $\delta > 0$
zodat $\forall x \in E \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

bekijk nu $\delta' = \min\{\delta_0, \delta\}$.
Neem $x \in E$ willekeurig. Dan: als $|x - x_0| < \delta'$
geldt $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ wegens $\delta' \leq \delta_0$
en dus $x \in E \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$, en te vens
$|x - x_0| < \delta$ dus samen geeft dit wegens de definitie
rechts dat $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Dus we vinden $\delta' > 0$ zodat $\forall x \in E$ $|x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
en daarmee is de definitie links geldig. $\boxtimes$

We zeggen ook wel dat de limiet alleen
te maken heeft met "lokaal gedrag" van de functie f

Nu een parallel met convergentie van rijen:

Prop TFAE (met $E \subset A$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{E}$)

(i) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = L$

(ii) Voor alle rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $a_n \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$
geldt dat $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ convergeert en

$\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = L$

Bew (i) $\Rightarrow$ (ii): gegeven $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in E$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
Neem nu willekeurig een conv $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $\forall n \in \mathbb{N}$
$a_n \in E$ en $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$. Bekijk ook $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$
Neem vervolgens $\varepsilon > 0$ willekeurig.
Dan is er een $\delta > 0$ zodat $\forall x \in E$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\delta > 0$ en $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. naar x_0, dus $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - x_0| < \delta$

voor die $N \in \mathbb{N}$, bekijk $n \geq N$. er geldt $a_n \in E$ en $|a_n - x_0| < \delta$, dus volgt $|f(a_n) - L| < \varepsilon$.

Dus voor will. $\varepsilon > 0$ vinden we een $N \in \mathbb{N}$ met $\forall n \geq N\ |f(a_n) - L| < \varepsilon \Rightarrow (f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ convergeert naar L. Dit voor een willekeurige naar x_0 convergerende rij in E, dus voor alle $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \in E$ geldt dit. $\Longrightarrow$ (ii)

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Stel voor elke rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $a_n \in E\ \forall n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ geldt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$

<u>Stel</u> nu dat <u>niet</u> $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in E}} f(x) = L$

Dus $\neg\, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

ekwivalent: $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in E\ |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon_0$

neem die ε_0 en

definieer $E_n = \{x \in E \mid |x - x_0| < \frac{1}{n+1}, |f(x) - L| \geq \varepsilon_0\}$

$E_n \neq \emptyset\ \forall n \in \mathbb{N}$, dus definieer een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ door steeds $a_n \in E_n$ te kiezen (keuze-axioma).

Dan zien we $|a_n - x_0| < \frac{1}{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$

dus $x_0 - \frac{1}{n+1} < a_n < x_0 + \frac{1}{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$, dus de sandwichstelling geeft ons dat $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent is met limiet x_0.

Maar $\forall n \in \mathbb{N}\ |f(a_n) - L| \geq \varepsilon_0$ dus voor $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ is er geen $N \in \mathbb{N}$ met $|f(a_N) - L| < \varepsilon$ laat staan $\forall n \geq N\ |f(a_n) - L| < \varepsilon$, dus $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ convergeert niet naar L. In tegenspraak met (ii)

$\Longrightarrow$ we concluderen $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in E}} f(x) = L$ $\boxtimes$

— De reeds ontwikkelde theorie van rijen stelt ons in staat de volgende proposities snel te geven:

<u>Prop</u> $f, g : A \to \mathbb{R}$, $E \subset A$, $x_0 \in \overline{E}$. neem aan dat

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = L \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} g(x) = M$$

(i) L is uniek bepaald (Ja, want dat hadden we nog nergens aangetoond!)

(ii) $\forall c, d \in \mathbb{R}$: $cf + dg$ convergeert, in x_0 door E naar $cL + dM$

(iii) fg convergeert door E in x_0 naar L

(iv) als $\forall x \in E$ geldt $g(x) \neq 0$ en $M \neq 0$ dan $\frac{f}{g}$ convergeert door E in x_0 naar $\frac{L}{M}$

(wegens lemma kunnen we hierbij E "kleiner" maken tot zodat mogelijk lokaal wel geldt $\forall x \in E \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ dat $g(x) \neq 0$)

<u>Bew</u> (i) voor elke rij $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ met $a(\mathbb{N}) \subset A$ waarvoor $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ geldt $f \circ a$ convergent naar L. Stel nu dat ook $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = L'$. Dan neem een conv. rij $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ met $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. dan $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$ en $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L'$

Maar limieten van rijen zijn uniek, dus $L = L'$

(ii) neem een willekeurige in E bevatte naar x_0 conv. rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Dan $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$ $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = M$

dan geldt voor deze beeldrijen, zeg $u_n = f(a_n)$, $v_n = g(a_n)$ dat $(cu_n + dv_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert en wel naar $cL + dM$ omdat $\lim_{n\to\infty} u_n = L$ $\lim_{n\to\infty} v_n = M$
$\Rightarrow$ voor elke naar x_0 conv. rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in E geldt dat $((cf+dg)(a_n))_{n=0}^{\infty}$ convergeert naar $cL+dM$.
Wegens de omkering vh lemma volgt dan dat $cf+dg$ door E in x_0 naar $cL+dM$ convergeert.

(iii) neem $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ $a_n \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ willekeurig. bekijk weer beeldrijen $(u_n), (v_n)$. Deze convergeren wegens lemma naar L, M. Maar dan conv. $(u_n v_n)_{n=0}^{\infty}$ naar LM
dus voor elke $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in E$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ volgt $((fg)(a_n))_{n=0}^{\infty}$ convergeert naar LM $\Rightarrow$ fg conv. door E in x_0 naar LM.

(iv) neem $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zoals hierboven, willekeurig. Dan geldt per aanname en lemma $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$, $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = M$ en $M \neq 0$ en $\forall n \in \mathbb{N}$ $g(a_n) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{f(a_n)}{g(a_n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ conv naar limiet $\frac{L}{M}$ $\Rightarrow$ $\left(\left(\frac{f}{g}\right)(a_n)\right)_{n=0}^{\infty}$ conv naar limiet $\frac{L}{M}$ voor elke $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in E die conv. naar x_0
$\Rightarrow$ $\frac{f}{g}$ conv. door E in x_0 naar $\frac{L}{M}$

$\square$

5.1.6 (Analogons van ordening v limieten en Sandwich principe)

(vi) Als $\forall x \in E$ $f(x) \leq g(x)$, dan (indien f, g zoals boven convergeren)

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) \leq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} g(x), \text{ oftewel } L \leq M$$

Bew neem rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in E met $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$
dan $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$ en $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = M$.

Nu geldt voor $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$, $(g(a_n))_{n=0}^{\infty}$ dat $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \in E$, dus $f(a_n) \leq g(a_n)$. Dus $L \leq M$.

(vii) (Sandwichprincipe) als $f, h : A \to \mathbb{R}$ conv. in x_0 door E naar L, resp. en $g : A \to \mathbb{R}$ zdd $\forall x \in E$ $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

dan conv. h in x_0 door E en wel naar L.

Bew neem $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in E naar x_0 convergerend. Dan $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in E$ dus $f(a_n) \leq g(a_n) \leq h(a_n)$ en $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = L = \lim_{n \to \infty} h(a_n)$. Dus volgt wegens "sandwich voor rijen" dat $(g(a_n))_{n=0}^{\infty}$ convergent is en wel naar L. Maar dit geldt voor willekeurige dus elke $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in E die naar x_0 convergeert $\Rightarrow$ g conv. in x_0 door E naar L wegens lemma.

$\square$

Continuïteit

Def $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. f heet continu in $x_0 \in A$ als
$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0)$

ekwivalent: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Def (Opgave) f heet continu als $\forall x_0 \in A$ f cont. in x_0
Bewijs dat voor $Y \subset A$ geldt dat $f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ cont. is.

Bew neem $x_0 \in Y$ willekeurig. dan $x_0 \in A$ wegens $Y \subset A$
dus $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
neem $\varepsilon > 0$ will. en neem de δ horend bij die ε.
Neem $x \in Y$ will. dan $x \in A$ wegens $Y \subset A$
en dus $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. maar
voor $x, x_0 \in Y$ is $|f|_Y(x) - f|_Y(x_0)|$ gedefinieerd en gelijk
aan $|f|_Y(x) - f|_Y(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
dus $\forall x \in Y\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f|_Y(x) - f|_Y(x_0)| < \varepsilon$ $\square$

Prop $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. TFAE:

(i) f is continu in x_0
(ii) voor elke rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in $A \ni a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$
die convergent is naar x_0 geldt dat $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$
convergent is naar $f(x_0)$
(iii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a \in A\ |x_0 - a| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(a)| < \varepsilon$

Bew (i) $\Leftrightarrow$ (ii) we weten $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = L \Leftrightarrow$ alle conv.
rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in A die convergeren naar x_0
hebben $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ convergent en wel naar L
dus neem nu $L = f(x_0)$ dan staat de equivalentie.
(i) $\Leftrightarrow$ (iii) dit is letterlijk de definitie $\square$

$f, g : A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}$ continu in $x_0 \in A$

Gevolg
(i) $\forall c, d \in \mathbb{R}$ $cf + dg$ continu in x_0
(ii) fg continu in x_0
(iii) f/g is continu in x_0 als $\forall x \in A$ $g(x) \neq 0$

Bew (i) we hebben dat $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} = g(x_0)$

dus per corrolarium 5.1.5 volgt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} (cf + dg)(x) = c \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) + d \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} g(x)$$

$$= cf(x_0) + dg(x_0) = (cf + dg)(x_0) \Rightarrow cf + dg \text{ cont.}$$

(ii) evenzo $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) g(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} g(x)$

$$= f(x_0) \cdot g(x_0) = (fg)(x_0) \Rightarrow fg \text{ continu.}$$

(iii) als $\forall x \in A$ $g(x) \neq 0$ dan ook $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} g(x) = g(x_0) \neq 0$ want $x_0 \in A$. Dus we mogen de limieten delen want we passen 5.1.5 (iv) toe met $L = f(x_0)$, $M = g(x_0) \neq 0$ en $E = A$,
$\forall x \in E$ $g(x) \neq 0$ $\Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$

$\Rightarrow \frac{f}{g}$ continu in x_0 $\boxtimes$

(Opgave) definieer voor $f, g : A \to \mathbb{R}$ de functie $\max\{f, g\} : A \to \mathbb{R}$ als $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ voor $x \in A$. Laat zien dat $\max\{f, g\}$ voor f, g continu in x_0 zelf continu is in x_0.

Bew
$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0)$ en $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} g(x) = g(x_0)$

er

$A \subset \mathbb{R}$ $\quad f(A) \subset B$

(Opgave) $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ continu in $x_0 \in A$ en $f(x_0) \in B$ respectievelijk. Laat zien dat $f \circ g$ continu is in x_0

Bew We weten wegens karakterisering vd limiet dat voor alle naar x_0 conv. rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A$ geldt dat $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ conv. is en $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0)$. maar ook geldt voor alle $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ welke naar $f(x_0)$ convergeren met $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \in B$ dat $(g(b_n))_{n=0}^{\infty}$ conv. is en naar $g(f(x_0))$, want g is continu in $f(x_0) \in B$.
Dus nemen we een will. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A$ die naar x_0 convergeerd, dan verkrijgen we $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ met $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(a_n) \in B$ en deze rij conv. naar $f(x_0)$, dus de rij $(g(f(a_n)))_{n=0}^{\infty}$ conv. naar $g(f(x_0))$ en dit voor will. rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ die naar x_0 conv.
Dus volgt dat $((g \circ f)(a_n))_{n=0}^{\infty}$ conv. naar $(g \circ f)(x_0)$ voor al zulke rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ $\Longrightarrow$ $g \circ f$ is continu in x_0

$\square$

Topologische karakterisering van continuïteit : TFAE

St. (i) $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, is continu $\Leftrightarrow$
(ii) $\forall U \subset \mathbb{R}$, U open, $f^{-1}(U)$ open m.b.t. A

"$\Longrightarrow$"

Bew Neem $U \subset \mathbb{R}$ open en neem een willekeurige $x \in f^{-1}(U)$ aan te tonen is dat er een $\delta > 0$ is met $(x-\delta, x+\delta) \cap A \subset f^{-1}(U)$
U is open dus er is een $\varepsilon > 0$ met $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset U$ (immers, $f(x) \in U$ aangezien $x \in f^{-1}(U)$). f is continu dus ook in $x \in A$. Dus voor deze $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodat $\forall a \in A$ $|a - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
dus een $\delta > 0$ zodat $\forall a \in A \cap (x - \delta, x + \delta)$ $f(a) \in (f(x) \mp \varepsilon)$
en $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subset U$ per aanname dus
$\exists \delta > 0$ $\forall a \in (x - \delta, x + \delta) \cap A$ $a \in f^{-1}(U)$
Wat "$\Longrightarrow$" voltooit.

"$\Leftarrow$": Stel dat elke $f^{-1}(U)$ voor $U \subset \mathbb{R}$ open, open is.
neem $\varepsilon > 0$ $x_0 \in A$ will. en bekijk $U = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, open
Dan is $f^{-1}(U)$ open mbt A dus $\forall x_0 \in f^{-1}(U)\ \exists \delta > 0$
$A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(U)$. herschreven,

$\forall x_0 \in f^{-1}(U)\ \exists \delta > 0\ \forall a \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A\ f(a) \in U$, m.a.w.
$\forall x_0 \in f^{-1}(U)\ \exists \delta > 0\ \forall a \in A\ a \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(a) \in (f(x_0) \mp \varepsilon)$
dus voor x_0 ihb:
$\exists \delta > 0\ \forall a \in A\quad |x_0 - a| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(a)| < \varepsilon$
voor will. $x_0 \in A$, will. $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow$
$\forall x_0 \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a \in A\quad |a - x_0| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x_0)| < \varepsilon$

dus we concluderen dat f continu is $\boxtimes$

Eigenschappen van continue functies:

Def $f : A \to \mathbb{R}$ heet

- van boven begrensd, als $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\quad f(a) \leq M$
- van onder ——, —— $\exists L \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\quad f(a) \geq L$
- begrensd als zowel van boven als van onder, waarmee equivalent: $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\quad |f(a)| \leq M$

Lemma $f : A \to \mathbb{R}$, f continu en A rijcompact.
Dan is f begrensd.

Bew Stel dat f niet bgd is, dus $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists a \in A\ |f(a)| > M$
Neem voor $n \in \mathbb{N}$ $A_n = \{a \in A \mid |f(a)| > n\}$
dan $\forall n \in \mathbb{N}\ A_n \neq \emptyset$ per aanname. Construeer (met keuze-axioma) een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \in A_n$
$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ heeft een conv. deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ die conv. naar een $a \in A$, want A is rijcompact. Omdat f continu is, moet $(f(a_{n_j}))_{j=0}^{\infty}$ convergent zijn, en wel naar $f(a)$. Echter voor $\forall M \in \mathbb{R}$ geldt
$\exists j \in \mathbb{N}\ n_j > M$ dus $|a_{n_j}| > n_j > M$, oftewel

$(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ is onbegrensd. En convergente rijen zijn begrensd, dus dit levert een tegenspraak.
We concluderen dat f begrensd moet zijn op A ■

Def $f: A \to \mathbb{R}$ functie $A \subset \mathbb{R}$. We zeggen dat f "zijn maximum aanneemt" in $x_0 \in A$ als
$\forall x \in A \quad f(x) \leq f(x_0)$.

— "— minimum —" : $\forall x \in A \quad f(x) \geq f(x_0)$

Opm Deze heten ook wel globale minima / maxima.

Prop $f: A \to \mathbb{R}$, A rijcompact. Dan $\exists x_0 \in A$ zodat f zijn maximum aanneemt in x_0

Bew f is begrensd want A is rijcompact. Dus $f(A) \subset \mathbb{R}$ heeft dan ook een supremum. Noem dit $m = \sup f(A)$
Als we kunnen aantonen dat er een $x_0 \in A$ is met $f(x_0) = m$, dan volgt dat $f(x_0)$ maximaal is op A en zijn we klaar. (immers $f(x_0) = \sup f(A) \geq f(a) \ \forall a \in A$)

Bekijk $A_n = \{x \in A \mid m - \frac{1}{n+1} < f(x) \leq m\}$ voor $n \in \mathbb{N}$
Omdat m kleinste bovengrens is, is $A_n \neq \emptyset$ voor alle n.
Dus construeren we een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \in A_n$.
$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zit in A bevat want $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \in A_n \subset A$. En A is rijcompact dus is er een conv. deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met limiet in A. noem $A \ni x_0 = \lim_{j\to\infty} a_{n_j}$. Omdat f continu is volgt $\lim_{j\to\infty} f(a_{n_j}) = f(x_0)$. Ook geldt

$\forall j \in \mathbb{N} \quad m - \frac{1}{n_j+1} < f(a_{n_j}) \leq m$. Nemen we sandwichprincipe met $(m - \frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ conv. naar $m-0$ en dus elke deelrij, ook $(m - \frac{1}{n_j+1})_{j\in\mathbb{N}}$ conv naar $m-0$, en $(m)_{n=0}^{\infty}$ constante rij conv. naar m, dan zien we $\lim_{j\to\infty} f(a_{n_j}) = m$. Wegens uniciteit van limieten volgt

$$f(x_0) = m \qquad \square$$

Gevolg Zij $f: A \to \mathbb{R}$ continu en A rijcompact. Dan neemt f zijn minimum aan in een zekere $x_0 \in A$

Bew Bekijk $-f: A \to \mathbb{R}$. omdat $-f = (-1)\cdot f$, $(-1) \in \mathbb{R}$ is $-f$ ook continu en neemt dus zijn maximum aan, zeg $x_0 \in A$ met $\forall x \in A\ -f(x_0) \geq -f(x)$. Maar dan $\forall x \in A\ f(x_0) \leq f(x)$, oftewel $f(x_0)$ is minimum van f. f neemt dus zijn min. aan in $x_0 \in A$ $\square$

Opm in het bewijs had de deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ limiet x_0. Het hoeft echter niet zo te zijn dat $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zelf convergent is. Bijvoorbeeld (of eigenlijk: juist wanneer) f op meerdere $x_0, x_1, \ldots$ zijn maximum aanneemt.
Eenvoudig tegenvoorbeeld: neem $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ door $f(x) = 1$
Dan is de rij $\left(\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{4}\right)_{n=0}^{\infty}$ een rij waarvoor $a_n \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, maar $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is niet conv..

— In het voorgaande was rijcompactheid van A steeds voldoende. We bespreken nu een andere eigenschap

Def We noemen $A \subset \mathbb{R}$ padsgewijs samenhangend als $\forall x, y \in A\ \forall t \in [0,1]$ $tx + (1-t)y \in A$.

— Elk interval $\subset \mathbb{R}$ is padsgewijs samenh. en andersom is elk padsgewijs samenh. verz. in $\mathbb{R}$ een interval.
(Dit bewijs slaan we nu even over)

(Tussenwaardestelling) $f: A \to \mathbb{R}$ met A padsgewijs samenh. en rijcompact, $a, b \in A$ en $a < b$. Stel $y \in [f(a), f(b)]$ of $y \in [f(b), f(a)]$. Dan is er een $x_0 \in [a, b]$ met $f(x_0) = y$

Bew we kunnen f eerst beperken tot $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ want dat is de eigenlijke stelling.
Neem zvva $f(a) \leq f(b)$ want anders bekijken we $-f$, die is namelijk ook continu en $-f: [a,b] \to \mathbb{R}$ en $-f(a) \leq -f(b)$ en $-y$ ligt tussen $-f(a)$ en $-f(b)$ zodat we het hiervoor kunnen bewijzen als we het kunnen bewijzen voor $f(a) \leq f(b)$. Als $f(a) = f(b)$ dan $y = f(a)$ dus neem $x_0 = a$. Dus neem $f(a) < f(b)$.
Neem ook $f(a) < y < f(b)$, anders $y = f(a) \Rightarrow$ neem $x_0 = a$ of $y = f(b) \Rightarrow$ neem $x_0 = b$. Definieer vervolgens

$$B = \{ x \in [a, b] \mid f(x) < y \}$$

$[a,b]$ is begrensd dus $B \subset [a,b]$ ook dus B heeft supremum, zeg $x_0 = \sup B$. We bekijken nu wat $f(x_0)$ is.

1) $f(x_0) \leq y$: want voor $n \in \mathbb{N}$ is $x_0 - \frac{1}{n+1}$ geen bovengrens voor B, dus $\exists a_n \in B$ $x_0 - \frac{1}{n+1} < a_n \leq x_0$ en $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ conv. wegens sandwichst. naar x_0
Dus wegens continuïteit van f volgt $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0)$ maar tevens $\forall n \in \mathbb{N}\, a_n \in B$ dus $f(a_n) < y$ $\forall n \in \mathbb{N}$
dus $f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \leq y$

2) We laten eerst zien $x_0 < b$. Als immers $x_0 = b$ ($B \subset [a,b]$ dus $x_0 \leq b$ per constructie) dan staat in 1) dat $f(b) \leq y$ terwijl per aanname $f(b) > y$.

Omdat $x_0 < b$ is er een $n_0 \in \mathbb{N}$ groot genoeg, zodat $x_0 + \frac{1}{n_0} \leq b$

Dan ook $x_0 + \frac{1}{n} \leq b$ voor $n \geq n_0$ En omdat $(x_0, b) \subset [a,b]$ ligt $(x_0+\frac{1}{n})_{n=n_0}^{\infty}$ geheel in $[a,b]$ waar f gedefinieerd is.

Bovendien $\forall n \geq n_0$ $x_0 + \frac{1}{n} > x_0$ dus $x_0 + \frac{1}{n} \notin B$ en dus $f(x_0+\frac{1}{n}) \geq y$ $\forall n \geq n_0$ Dus

$$y = \lim_{n\to\infty} y \leq \lim_{n\to\infty} f(x_0+\tfrac{1}{n}) \underset{\text{per continuiteit}}{=} f(x_0)$$

$$\Longrightarrow \quad y \leq f(x_0) \leq y \quad \Rightarrow f(x_0) = y \quad \text{QED}$$

(Corrolarium) $a<b$ $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ een continue functie. $m = \sup f([a,b])$, $\ell = \inf f([a,b])$. Dan volgt $f([a,b]) = [\ell, m]$

Bew Wegens de eerdere st. over min/max en dat $[a,b]$ rijcompact is, geldt dat f zijn min aanneemt in een $c \in [a,b]$ en zijn max in een $d \in [a,b]$ en dit zijn ℓ, m resp. Als $c<d$, bekijk $[c,d]$ en anders bekijk $[d,c]$. Voor f beperkt tot $[c,d]$ geldt wegens tussenwaardestelling dat als y tussen $\ell = f(c)$ en $m = f(d)$ ligt, dan is er een $x_0 \in [c,d]$ met $f(x_0) = y$. Dus een $x_0 \in [a,b]$ met $y = f(x_0)$. Elke $y \in [\ell, m]$ wordt dus geraakt. Andersom wordt geen andere $y \notin [\ell, m]$ geraakt, anders zou die y in $f([a,b])$ liggen maar onder ondergrens ℓ van $f([a,b])$ of boven bovengrens m van $f([a,b])$

Nu volgt dus $[\ell, m] \subset f([a,b])$ en uit het voorgaande $f([a,b]) \subset [\ell, m]$ $\Rightarrow f([a,b]) = [\ell, m]$ ■

5.3 Uniforme continuïteit

Def $f: A \to \mathbb{R}$ heet uniform continu $(A \subset \mathbb{R})$ als

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, a \in A \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

We kunnen dus δ kiezen zonder dat deze van x mag afhangen ("uniform in x")

— Continuïteit: (is zwakker)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in A \ \exists \delta > 0 \ \forall a \in A \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Lemma $f: A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}$ uniform continu. Dan voor $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een Cauchy-rij in A, is $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$.

Bew neem $\varepsilon > 0$ will. te bewijzen dat er een $N \in \mathbb{N}$ is met $\forall n, m \geq N$ $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$.

We weten dat er een $\delta > 0$ is zodat
$\forall x, y \in A$ $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
Voor die $\delta > 0$ is er een $N \in \mathbb{N}$ zodat
$\forall n, m \geq N$ $|a_n - a_m| < \delta$. Bekijk die N:

Voor $n, m \geq N$ geldt $|a_n - a_m| < \delta$, dus omdat $a_n, a_m \in A$ volgt $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$. Dus
$\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n, m \geq N$ $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$ voor $\forall \varepsilon > 0$ $\square$

— We zien dat hieruit volgt:

Gevolg $f: A \to \mathbb{R}$ uniform continu en A begrensd, dan $f(A)$ begrensd.

Bew Stel dat $f(A)$ niet bgd is, dus $\forall L \in \mathbb{R}$ $\exists a \in A$ $|f(a)| > L$
oftewel, voor alle $n \in \mathbb{N}$ is $A_n = \{a \in A \mid |f(a)| > n\} \neq \emptyset$
dus kies een rij $a_n \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dan

is $(a_n)_{n=0}^\infty$ begrensd en $(f(a_n))_{n=0}^\infty$ niet.
We kunnen nu wegens Bolzano - Weierstrass een convergente deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^\infty$ van $(a_n)_{n=0}^\infty$ vinden omdat $(a_n)_{n=0}^\infty$ begrensd is. Deze rij heeft een limietwaarde $x \in \bar{A}$ maar dat gebruiken we niet: alleen dat $(a_{n_j})_{j=0}^\infty$ daardoor cauchy is, en dus per lemma 5.3.2 ook $(f(a_{n_j}))_{j=0}^\infty$ cauchy. Maar $(f(a_{n_j}))_{j=0}^\infty$ heeft ook als eigenschap $|f(a_{n_j})| > n_j \geq j$ $\forall j \in \mathbb{N}$ dus is onbegrensd want voor elke $L \in \mathbb{R}$ kiezen we $j \in \mathbb{N}$ met $j \geq L$ dan $|f(a_{n_j})| > L$. Dus kan $(f(a_{n_j}))_{j=0}^\infty$ niet cauchy zijn, contradictie (Cauchy-rijen zijn altijd begrensd) $\square$

— Hiermee volgt bijvoorbeeld dat $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \frac{1}{x}$ niet uniform continu kan zijn. De cauchy-rij zou bijvoorbeeld $(\frac{1}{n})_{n=1}^\infty$ kunnen zijn welke als beeldrij $(n)_{n=0}^\infty$ heeft.

— We zagen reeds dat continue functies precies die functies zijn welke convergente rijen omzetten in convergente rijen waarvan de limietwaarde van de beeldrij het beeld van de limietwaarde van de rij was.

— We geven nu een karakterisering van uniform continue functies in termen van rijen.

<u>Def</u> Rijen $(a_n)_{n=0}^\infty$ en $(b_n)_{n=0}^\infty$ heten equivalent als $(a_n - b_n)_{n=0}^\infty$ convergent is en $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - b_n| < \varepsilon$$

— a_n, b_n hoeven zelf niet conv. te zijn.

Lemma (Opgave) zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ rijen

(ii) als $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ equivalent zijn en (a_n) convergeert met $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, dan convergeert (b_n) met $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Bew. $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(a_n - b_n)_{n=0}^{\infty}$ zijn beide convergent, dus $(a_n - (a_n - b_n))_{n=0}^{\infty}$ is convergent met limiet $L - 0 = L$ en $(a_n - (a_n - b_n))_{n=0}^{\infty} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$, dus $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ is convergent met $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. $\square$

(iii) als $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ niet convergent is, dan is $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ dat ook niet.

Bew stel $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ is wel convergent, dan volgt dat $(b_n + (a_n - b_n))_{n=0}^{\infty}$ convergent is, maar dat is juist $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en die rij is per aanname divergent. ↯
Dus $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ is niet conv. dus divergent.

Conclusie: als $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ equivalent zijn, dan zijn ze ofwel beide convergent ofwel beide divergent. In geval ze beide conv. zijn hebben ze dezelfde limietwaarde.

(iv) Zij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ en $(b_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ deelrijen van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, waarbij $j \mapsto n_j$ dezelfde stijgende functie $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is voor a en b. Dan zijn deze deelrijen equivalent als $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ dat zijn.

Bew $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - b_n| < \varepsilon$. Neem $\varepsilon > 0$ will. dan vinden we $N \in \mathbb{N}$. Zoek dan $J \in \mathbb{N}$ zodat $n_J \geq N$, dan $\forall j \geq J\quad n_j \geq \overline{n_J \geq N}$ (want $j \mapsto n_j$ strikt stijgend)
dus $|a_{n_j} - b_{n_j}| < \varepsilon \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists J \in \mathbb{N}\ \forall j \geq J\ |a_{n_j} - b_{n_j}| < \varepsilon$

dus ze zijn equivalent. $\square$

We hadden ook snel kunnen opmerken dat elke deelrij v. een conv. rij (zoals $(a_n - b_n)_{n=0}^{\infty}$) conv. is met dezelfde limiet.

Geldt het echter ook wanneer we verschillende labelfuncties kiezen voor de deelrijen? dus $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ en $(b_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ waarbij ~~bij~~ a : $n_j = f(j)$ en in b : $n_j = g(j)$?

We zien dat als we een tegenvoorbeeld willen, dat a en b wel beide divergent moeten zijn (anders $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = L$ en $\lim_{j\to\infty} b_{n_j} = L$ (deelrij van conv. rij) dus $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} - b_{n_j} = 0$)

keep it simple: neem $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n$
dan $a_n = b_n$ dus $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.
dus equivalent.
Maar voor $(a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ en $(b_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ deelrijen van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ geldt $a_{2n} - b_{2n+1} = 1 - -1 = 2$
const. rij dus convergeert wel, naar $2 \neq 0$ $\Rightarrow$ tegenvoorbeeld, deze deelrijen zijn n.l. niet equivalent.

(Karakterisering uniform continue functie)

Prop $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}$. TFAE:

(i) f is uniform continu

(ii) voor elk paar rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ die equivalent zijn en in A liggen geldt dat $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ $(f(b_n))_{n=0}^{\infty}$ equivalent zijn.

Bew "$\Longrightarrow$" er geldt $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - b_n| < \varepsilon$

tevens $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, a \in A$ $|a - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Dus neem $\varepsilon > 0$ will. dan is er een $\delta > 0$ zodat voor alle $x, a \in A$ $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

dus nu vinden we voor $\delta > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N \ |a_n - b_n| < \delta$

dan geldt tevens $\forall n \geq N \ |f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon$. dus

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon \Rightarrow f(a_n), f(b_n)$ eq.

"$\Longleftarrow$" Stel f is niet uniform continu (ongerijmde)

$\neg \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, a \in A \ |x - a| < \delta \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, a \in A \ |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

Neem ε zoals hierboven vast.

Neem nu voor $n \in \mathbb{N}$ steeds $\delta = \frac{1}{n+1} > 0$

en vind a_n, b_n met $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$ en $|a_n - b_n| < \delta$

Dan volgt $\forall n \in \mathbb{N} \ |a_n - b_n| < \frac{1}{n+1}$ dus nemen we de limiet dan vinden we $\lim_{n \to \infty} |a_n - b_n| = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n - b_n = 0$ (m.o.w. $\forall n \in \mathbb{N} \ -\frac{1}{n+1} < a_n - b_n < \frac{1}{n+1}$ en pas dan de sandwich toe).

dus a_n, b_n equivalent. maar $\lim_{n \to \infty} |f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon > 0$

dus $\lim_{n \to \infty} f(a_n) - f(b_n) \geq \varepsilon$ of $\leq -\varepsilon$, dus niet 0.

$\Rightarrow f(a_n), f(b_n)$ niet eq. $\Rightarrow$ ↯ want f zette punt eq. rijen om in eq. rijen. $\square$

— (Dirichlet) $f: A \to \mathbb{R}$ met $A \subset \mathbb{R}$ en A rijcompact.
dan als f continu $\Rightarrow$ f uniform continu.

Bew Bew. uit het ongerijmde: stel f is niet uniform continu. Vanwege de karakterisering van un. continuïteit volgt dat er rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ zijn zodat $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$ en $f(a_n) - f(b_n)$ niet conv. naar 0.

$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N \ |f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon_0$
Neem nu, omdat $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A$ en A rijcompact, een deelrij van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zeg $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ die conv. naar $L \in A$.
Dan geldt voor dezelfde subindex $j \mapsto n_j$ dat $(b_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ ook convergent moet zijn naar limiet L, zie namelijk de opgave over equivalentie van deelrijen van equiv. rijen.

Dus nu volgt wegens continuïteit $\lim_{j\to\infty} f(a_{n_j}) = f(L)$
en $\lim_{j\to\infty} f(b_{n_j}) = f(L)$
$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} |f(a_{n_j}) - f(b_{n_j})| = 0$

Dus $\forall \varepsilon > 0 \ \exists J \in \mathbb{N} \ \forall j \geq J \ |f(a_{n_j}) - f(b_{n_j})| < \varepsilon.$
dus ook $\exists J \in \mathbb{N} \ \forall j \geq J \ |f(a_{n_j}) - f(b_{n_j})| < \varepsilon_0$
maar voor $j \geq J$ volgt

St (Dirichlet?

5.3.10

$f: A \to \mathbb{R}$ continu en A rijcompact. Dan is f uniform continu.

Bew Stel f is niet uniform continu:

$\neg\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a,b \in A\ |a-b| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon$

eq: $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists a,b \in A\ |a-b| < \delta \wedge |f(a) - f(b)| \geq \varepsilon_0$

neem deze ε_0 vast en neem voor $n \in \mathbb{N}_1$, steeds $\frac{1}{n} > 0$.

dan $\exists a,b \in A\ |a-b| < \frac{1}{n} \wedge |f(a) - f(b)| \geq \varepsilon_0$

Kies deze a,b steeds als onze $a_n, b_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}_1$.

Dan zijn $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ equivalent want

$\forall n \in \mathbb{N}_1$ $-\frac{1}{n} < a_n - b_n < \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ sandwichprincipe geeft

$a_n - b_n$ conv. met $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Maar kies

nu, omdat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij in A is, een conv. deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$

van $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uit, met limiet $L \in A$. Dan is voor

dezelfde subindex $j \mapsto n_j$, ook $(b_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ convergent

met dezelfde limiet (zie voorgaande opgave) $\Rightarrow$

omdat f continu is, $\lim\limits_{j\to\infty} f(a_{n_j}) = f(L)$, $\lim\limits_{j\to\infty} f(b_{n_j}) = f(L)$

dus $\lim\limits_{j\to\infty} |f(a_{n_j}) - f(b_{n_j})| = 0$

Dus de rij $|f(a_{n_j}) - f(b_{n_j})|$ convergeert naar 0,

maar is tegelijk altijd minstens $\varepsilon_0 > 0$, dus als hij

al convergeert dan naar $\varepsilon_0 > 0$, contradictie $\square$

5.4 # Rijen van Functies & Convergentie

Def (Puntsgewijze convergentie) voor elke $n \in \mathbb{N}$ is er een functie $f_n : A \to \mathbb{R}$ en we hebben een functie $f : A \to \mathbb{R}$. Dan heet de rij $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ "puntsgewijs convergent" naar f als

$$\forall x \in A \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Def (Uniform convergent) dezelfde aannamen als hierboven, dan heet $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ uniform conv. naar f als

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

→ dus we moeten N onafh. van x kunnen kiezen! Het is wederom sterker dan puntsgewijze convergentie.

St stel $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ uniform en $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n is continu.
Dan is f continu.

Bew Hangt op de ongelijkheid: (wegens driehoeksongelijkheid)

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

voor $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x, y \in A$.

Neem $\varepsilon > 0$ willekeurig. $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$ dus:
Dan $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $\forall x, y \in A$ $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$
Bekijk dus $N \geq N$. Dan hebben we:

$$|f(x) - f(y)| \leq \tfrac{2}{3}\varepsilon + |f_N(x) - f_N(y)|$$ zelfs al is y nog willek.

want we weten dat we $|f_n(y) - f(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ kunnen afschatten. keuz
Omdat bovendien f_N continu is, kunnen we nu voor vaste $x \in A$ een $\delta > 0$ vinden zodat $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ als $\forall y \in A$ en $|y - x| < \delta$. $\Rightarrow$ voor deze δ geldt

$\forall y \in A \ |x-y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$

dus $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in A \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in A \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\square$

— Waarom gaat dit niet als f_n puntsgewijs conv? Omdat we dan geen afschatting kunnen vinden voor $|f_n(y) - f(y)|$ als y willekeurig is gekozen.

immers gegeven $\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
kies $\varepsilon > 0$ willk. en $x \in A$ vast. Er is dan zeker een $N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$
maar om een $M \in \mathbb{N}$ te vinden zodat $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ voor $n \geq M$, moeten we y vast gekozen hebben.
En dan mogen we niet meer generaliseren naar alle $y \in A$ zodat $|x-y| < \delta$, want y is vast gekozen.
Terwijl we N, M beide nodig hebben om f_K ($K = \max\{N, M\}$) te kunnen substitueren. $\square$

— Neem willk. $\varepsilon > 0$. Er is een $N \in \mathbb{N}$ zodat

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \quad \forall x \in A$$

. Voor die N en een vaste x! is f_N continu, dus
Er is een $\delta > 0$ zodat

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in A.$$

Voor die x, δ geldt wegens de eerder genoemde driehoeksongelijkheid

$$\forall y \in A \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Als f_n uniform continu is voor elke $n \in \mathbb{N}$, dan zien we dat we x niet vast hoeven te kiezen, dus volgt dat f ook uniform continu kan worden genoemd

BEGIN GARLING

! Garling definieert diff.baarh. alleen voor inwendige punten $a \in D(f)$ dit verschilt vd syllabus

Differentieerbaarheid (Garling.)

Def $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. $a \in \overline{A}$ en a niet geïsoleerd, dus een limietpunt
$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ \ x \neq a, \ |x-a| < \varepsilon)$.
Dan heet f differentieerbaar in a als voor $f'(a) \in \mathbb{R}$ geldt

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A - \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

oftewel, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A, x \neq a$

$$|x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon$$

— in dit geval is $f'(a) \in \mathbb{R}$ uniek bepaald omdat limieten dat zijn, en we noemen $f'(a)$ de afgeleide van f in a.

Opm diff.baarheid is een "lokale" eigenschap wegens dat voor will. $\delta_0 > 0$ geldt:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = L \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)}} f(x) = L$$

n.l.:
neem $E = A - \{x_0\}$ in deze stelling.

Opgave (lokaalheid van afgeleide)
Stel $f : A \to \mathbb{R}$ is diff.baar in $a \in A$. Zij $Y \subset A$ en a is een limietpunt van Y. Dan is $f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ diff.baar in a, en $(f|_Y)'(a) = f'(a)$

Bew a is een limietpunt van Y,
en gegeven

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \underset{x \neq a}{x \in A} \ |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon$$

neem $\varepsilon > 0$ will. en hierbij de δ uit de definitie. Zij $x \in Y$ $x \neq a$. Dan $Y \subset A$ dus volgt $|x-a| < \delta \Rightarrow \cdots$

En omdat a een limietpunt van Y is, is de definitie geldig.

Opm De omkering is iha. niet waar:

Neem $f(x) = |x|$ op $A = (-1, 1)$ en $Y = (0, 1) \subset (-1, 1)$. Dan is $f|_Y$ diff.baar in 0 limietpunt van Y, n.l. $f|_Y'(0) = 1$.
Maar f is niet diff.baar in 0.

Prop (Newton-approximatie) $f : A \to \mathbb{R}$ functie, x_0 limietpunt van A. TFAE:

(i) f is diff.baar in a en $f'(a) = L$
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$
$\forall x \in A \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - (L(x-a) + f(a))| \leq \varepsilon |x - a|$

let op de $\leq$. Deze is nodig voor het geval $x = a$, in welk geval beide zijden 0 zijn.

Bew (i) $\Rightarrow$ (ii): $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A, x \neq a \quad |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| < \varepsilon$
verm. beide zijden met $|x-a| \neq 0$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A, x \neq a \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a) - L(x-a)| < \varepsilon |x-a|$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A, x \neq a \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - (f(a) + L(x-a))| \leq \varepsilon |x-a|$

en voor $x = a$ geldt $|x - a| = 0 < \delta \;\wedge$
$|f(x) - (f(a) + L(x-a))| = |f(a) - f(a)| = 0 = \varepsilon \cdot 0 = \varepsilon \cdot |x - a|$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - (f(a) + L(x-a))| \leq \varepsilon |x-a|$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Stel $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad |x - a| < \delta \Rightarrow$
$|f(x) - (f(a) + L(x-a))| \leq \varepsilon |x - a|$

neem $\varepsilon > 0$ will. Dan $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ en $\frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$. Er is dus een $\delta > 0$ zodat $\forall x \in A \;\; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - (f(a) + L(x-a))| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x-a|$

neem die δ vast.

neem nu $x \in A$, $x \neq a$ willekeurig. Als $|x-a| < \delta$

Dan $|f(x) - (f(a) + L(x-a))| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x-a|$. Omdat $|x-a| \neq 0$ want $x \neq a$ dus $x - a \neq 0$, volgt

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - L \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{voor alle } x \in A: \; x \neq a, |x-a| < \delta$$

dit bewijst (i) $\square$

Opgave ($x \mapsto c$ en $x \mapsto x$ zijn diffbaar in alle $x_0 \in \mathbb{R}$)

(i) zij $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Dan geldt voor elke $x_0 \in \mathbb{R}$ dat f diffbaar in x_0 is en $f'(x_0) = 0$

Bewijs: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}}} \frac{c-c}{x-x_0}$ bestaat want $\frac{c-c}{x-x_0} = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$

en een constante functie heeft overal als limietwaarde deze constante, dus $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$

(ii) Zij $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g(x) = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$. Dan geldt voor elke $x_0 \in \mathbb{R}$ dat g diff.baar is in x_0 en $g'(x_0) = 1$

Bewijs: voor $x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ is $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

dus $x \mapsto \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ is wederom constante functie die dus "overal" ook in x_0 als limiet 1 heeft. $\rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 1$

$\Longrightarrow g'(x_0) = 1$

$\square$

Corr (Gevolg van Newton Approximatie) $f: A \to \mathbb{R}$ functie. x_0 limietpunt van A. Als $x_0 \in A$ en f is differentieerbaar in x_0, dan is f continu in x_0.

Bew wegens (i) $\Rightarrow$ (ii) in "Newton Approximatie" volgt

$\forall \varepsilon' > 0 \; \exists \delta' > 0 \; \forall x \in A \; |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \leq \varepsilon' |x - x_0|$

dus $\forall \varepsilon' > 0 \, \exists \delta' > 0 \; \forall x \in A \; |x - x_0| < \delta' \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq \varepsilon' |x - x_0| + L(x - x_0)$

$-\varepsilon'|x-x_0| - |L||x-x_0| \leq -\varepsilon'|x - x_0| + L(x - x_0) \leq$ $\quad \leq \varepsilon'|x-x_0| + |L||x-x_0|$

dus $\forall \varepsilon' > 0 \; \exists \delta' > 0 \; \forall x \in A \; |x - x_0| < \delta' \Rightarrow$

$|f(x) - f(x_0)| \leq (\varepsilon' + |L|)|x - x_0|$

neem $\varepsilon > 0$, kies δ' voor $\varepsilon' = 1$ in bovenstaande formule en kies $\delta = \min\{\delta', \frac{\varepsilon}{2 + 2|L|}\}$, dan

als $x \in A$ $|x - x_0| < \delta$, dan wegens $|x - x_0| < \delta^* \leq \delta'$ geldt $|f(x) - f(x_0)| \leq (1 + |L|)|x - x_0|$ en wegens $|x - x_0| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2 + 2|L|}$ volgt $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{(1 + |L|)\varepsilon}{2 + 2|L|} = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ $\square$

Alternatief (Direct bewijs): $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R}$

is gegeven. Verder geldt dat $x \mapsto x - x_0$ op $A \setminus \{x_0\}$ limiet $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}}} x - x_0 = 0$ heeft, want neem $\delta = \varepsilon$.

(als $\varepsilon > 0$ wil, dan als $x \in A \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0 - 0| < \varepsilon$)

$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = L \cdot 0 = 0$

wegens vermenigv. van limieten voor twee convergenties.

maar $x - x_0 \neq 0$ dus $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f(x) - f(x_0)$

$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A \setminus \{x_0\}}} f(x) - f(x_0) = 0$ en $f(x_0) - f(x_0) = 0$

dus geldt meer algemeen $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) - f(x_0) = 0$.

EINDE GARLING

maar $f(x_0)$ is constante, dus conv. naar $f(x_0)$ dus $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) - f(x_0) + f(x_0) = 0 + f(x_0)$ $= f(x_0)$