CH4 Topologie van $\mathbb{R}$

Open & inwendig.

4.1

Def $a \in \mathbb{R}$ en $\varepsilon > 0$: $N_\varepsilon(a) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon \}$
$= (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ dit heet de open ε-omgeving van a.

Def $A \subset \mathbb{R}$. De inwendige verz. van A, A°, is
$A^\circ = \{ a \in A \mid \exists \varepsilon > 0 \ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A \}$

merk op $A^\circ \subset A$ per definitie.

Def $A \subset \mathbb{R}$ heet open als $A^\circ = A$. Dit betekent precies dat $A \subset A^\circ$

Prop $A, B \subset \mathbb{R}$

(i) $A \subset B \implies A^\circ \subset B^\circ$

(ii) A° is open; $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

(iii) A° is de grootste open deelverz. van A, dwz.
$B \subset A$ B open $\Rightarrow B \subset A^\circ$

(iv) $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ collectie van open verz. dan $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ open

(v) $A_1, \dots, A_N$ eindige collectie open verz., dan
$\bigcap_{i=1}^{N} A_i$ open

(vi) $\emptyset$ en $\mathbb{R}$ zijn open.

Bew

(i) stel $a \in A^\circ$. Dan $\exists \varepsilon > 0$ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$.
maar $A \subset B$, dus voor die ε : $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset B \Rightarrow a \in B^\circ$
dus $A^\circ \subset B^\circ$

(ii) stel $a \in A^\circ$. dan $\exists \varepsilon > 0$ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$. Neem
nu $b \in (a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2})$. Dan $(b-\frac{\varepsilon}{2}, b+\frac{\varepsilon}{2}) \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$
dus $b \in A^\circ \Rightarrow (a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2}) \subset A^\circ$, dus
voor $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ geldt $\exists \varepsilon' > 0$ $(a-\varepsilon', a+\varepsilon') \subset A^\circ$. Dus
$a \in (A^\circ)^\circ \Rightarrow A^\circ \subset (A^\circ)^\circ$

(iii) stel $B \subset A$ en $B^\circ = B$. Wegens (i) $B^\circ \subset A^\circ$. Wegens aanname $B = B^\circ \subset A^\circ \Rightarrow B \subset A^\circ$

(iv) We hebben dat $\forall \alpha \in I$ $A_\alpha^\circ = A_\alpha$. oftewel $\forall \alpha \in I$ $A_\alpha^\circ \supset A_\alpha$. Zij nu $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Dan stel $a \in A$, dus $\exists \alpha \in I$ $a \in A_\alpha$. omdat A_α open is, $a \in A_\alpha^\circ$. dus $\exists \varepsilon > 0$ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A_\alpha$
maar $A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, dus voor dezelfde ε: $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$
dus $a \in A \Rightarrow a \in A^\circ$ dus $A^\circ = A$.

(v) Neem $a \in \bigcap_{i=1}^N A_i = A$ Dan zit $a \in A_i$ voor alle $i = 1, \ldots N$
en deze zijn alle open dus $a \in A_i^\circ$ $\forall i = 1, \ldots N$.
Dus voor alle A_i is er een $\varepsilon_i > 0$ met $(a-\varepsilon_i, a+\varepsilon_i) \subset A_i$
Dan zij $\varepsilon = \max_i \{\varepsilon_i\}$, welke bestaat want er zijn eindig veel ε_i (namelijk N). Nu geldt $\varepsilon \leq \varepsilon_i$ $\forall i$,
dus $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (a-\varepsilon_i, a+\varepsilon_i) \subset A_i$ $\forall i$, dus
$a \in A^\circ \Rightarrow A \subset A^\circ$ dus A is open.

(vi) $\emptyset$: als $x \in \emptyset$ dan $\perp \Rightarrow$ ex falso quod libet, $x \in \emptyset^\circ$
$\mathbb{R}$: als $a \in \mathbb{R}$, dan $(a-1, a+1) \subset \mathbb{R}$ dus $\exists \varepsilon > 0$
$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^\circ$

$\boxtimes$

Merk op dat eindigheid van de collectie open verzamelingen in (v) noodzakelijk is.

Neem bijvoorbeeld $\bigcap_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

Open intervallen zijn namelijk open verzamelingen, immers als $x \in (a,b)$ dan $a < x < b$, dus voor $\varepsilon = \min\{x-a, b-x\}$ geldt $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a,b)$
dus $(a,b)^\circ = (a,b)$. Elke $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ is dus open

Maar we kunnen tevens aantonen $\bigcap_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$
en deze is niet open.

Gesloten & Afsluitingen.

Def $A \subset \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ dan heet x een afsluitingspunt (closure point) van A als
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ \ |x - a| < \varepsilon$, equivalent,
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ \ x \in N_\varepsilon(a)$

Def $x \in \mathbb{R}$ heet een limietpunt van A als
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \setminus \{x\} \ \ |x - a| < \varepsilon$

Opm $a \in A \Rightarrow a$ afsluitingspunt
$x \in \mathbb{R}$ limietpunt $\Rightarrow x$ afsluitingspunt

Def de afsluiting van $A \subset \mathbb{R}$ is
$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ \ |x - a| < \varepsilon\}$
dus merk op $A \subset \overline{A}$

Def A heet gesloten als $A = \overline{A}$, dus, equivalent als $\overline{A} \subset A$

(— def: $A \subset B$ heet dense in B als $B \subset \overline{A}$)

Prop (Karakterisering van afsluitingspunten van $A \subset \mathbb{R}$)
TFAE: (i) x afsl. punt van A
(ii) er is een rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \in A$ en $\lim_{n \to \infty} a_n = x$

Bew (ii) $\Rightarrow$ (i): Dit geeft per definitie
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \underset{\forall n \geq N}{|a_n - x| < \varepsilon}$. omdat $a_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ |a - x| < \varepsilon$ namelijk a_N voldoet.

(i) $\Rightarrow$ (ii) definieer voor $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \{a \in A \mid |x - a| < \frac{1}{n+1}\}$
omdat $\frac{1}{n+1} > 0$ is er een $a \in A$ met $|x - a| < \frac{1}{n+1}$
want x is afsl. punt, dus $\forall n \in \mathbb{N} \ A_n \neq \emptyset$.
Kies dan met het keuze-axioma een rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met $a_n \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dan hebben we een rij met $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A_n \subset A$, dus uit A.
En bovendien, $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq |x - a_n| < \frac{1}{n+1}$
dus $\forall n \in \mathbb{N}$ $x - \frac{1}{n+1} < a_n < x + \frac{1}{n+1}$. Nemen we de limiet, dan $\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} a_n = x$ wegens de sandwich-
$\lim \ldots x \pm \frac{1}{\ldots} = x$ ...

Lemma $A \subset \mathbb{R}$. dan A is open $\iff$ A^c is gesloten.

Bew "$\iff$" $x \in (A^\circ)^c \iff x \notin A^\circ$
$\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subset A \iff$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, y \in A^c \quad y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \iff x \in \overline{A^c}$
oftewel $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$
dus $A = A^\circ \Rightarrow A^c = (A^\circ)^c = \overline{A^c}$
en $A^c = \overline{A^c} \Rightarrow A^c = (A^\circ)^c \Rightarrow A = A^\circ$ $\square$

Met dit lemma is nu eenvoudig de volgende analoge set proposities te bewijzen:

Prop $A, B \subset \mathbb{R}$:
(i) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
(ii) $\overline{A}$ gesloten, i.e. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
(iii) $\overline{A}$ is de kleinste gesl. verz. die A bevat, dus $\overline{B} = B$ en $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset B$
(iv) $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ collectie van gesl. verz. A_α. dan $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ gesl.
(v) $A_1, \dots A_N$ collectie gesl. verz., eindig dan $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ gesl.
(vi) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ gesloten.

Bew (i) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c \Rightarrow (B^c)^\circ \subset (A^c)^\circ \Rightarrow$
$\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c \subset ((B^c)^\circ)^c = \overline{B}$

(ii) wegens $(S^\circ)^c = \overline{S^c}$, geldt $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$
en $A^{\circ\circ} = A^\circ$, dus $((A^c)^\circ)^c = (((A^c)^\circ)^\circ)^c \underset{\uparrow}{=} \overline{((A^c)^\circ)^c} = \overline{\overline{A}}$
neem $S = (A^c)^\circ$

(iii) stel $\overline{B} = B$ en $A \subset B$. Dan $\overline{A} \subset \overline{B}$ wegens (i)
en $\overline{B} = B$ dus $\overline{A} \subset B$.

(iv) $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ collectie gesl. verz. A_α. Dan
A_α^c $\alpha \in I$ collectie open verz. $A_\alpha^c \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ is open
de morgans wetten: $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$
dus $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$ is open, maar dan is $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ gesloten

Rand

(v) Zij $A_1, \ldots, A_N$ eindige collectie gesl. verz.. Dan $A_1^c, \ldots, A_N^c$ eindige collectie open verz. dus $\bigcap_{i=1}^N A_i^c$ is open. "de morgan": $\bigcap_{i=1}^N A_i^c = (\bigcup_{i=1}^N A_i)^c$ geeft dus dat $(\bigcup_{i=1}^N A_i)^c$ open is, dus dan is $\bigcup_{i=1}^N A_i$ gesloten wegens lemma. "A open $\Leftrightarrow$ A^c gesl."

(vi) $\emptyset$ is open, dus $\emptyset^c$ (in $\mathbb{R}$ steeds, zoals voor alle complementen, ook die in het lemma!) $\emptyset^c = \mathbb{R}$ gesloten.
$\mathbb{R}$ open, dus $\mathbb{R}^c = \emptyset$ gesloten. $\boxtimes$

— We kunnen al deze proposities ook vanuit de definitie bewijzen, maar het lemma is veel sneller!

<u>Def</u> Als $A \subset \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ en x is ~~[illegible]~~ geen limietpunt maar wel een afsluitingspunt van A, dan heet x een "geïsoleerd punt"

<u>Def</u> De rand ("boundary") van een verz. $A \subset \mathbb{R}$ is $\partial A := \overline{A} - A^o$

<u>Prop</u> (i) ∂A is gesloten voor alle $A \subset \mathbb{R}$

(ii) $a \in \partial A \iff \forall \varepsilon > 0 \ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ en $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

<u>Bew</u> (i)

$$\partial A = \overline{A} - A^o = \overline{A} \cap (A^o)^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

en de doorsnede van gesl. verz. is weer gesloten en $\overline{A}$, $\overline{A^c}$ zijn steeds gesloten. $\Rightarrow$ ∂A gesloten.

(ii) $a \in \partial A \iff a \in \overline{A} \cap \overline{A^c}$ (zie (i)) $\iff a \in \overline{A} \wedge a \in \overline{A^c}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ |x-a| < \varepsilon \ \wedge \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A^c \ |x-a| < \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ \forall \varepsilon > 0 \ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

$\boxtimes$

4.1.21 (Opgave) laat zien dat voor $A \subset \mathbb{R}$,

1 — $(\partial A)^c = A^\circ \cup (A^c)^\circ$.

— <u>Bewijs</u> : $x \in (\partial A)^c \iff x \in \left(\overline{A} \cap \overline{A^c}\right)^c$ "de morgan"

$\iff x \in (\overline{A})^c \cup (\overline{A^c})^c$

en $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$, dus $(\overline{A^c})^c = ((A^\circ)^c)^c = A^\circ$, $(\overline{A})^c = (\overline{(A^c)^c})^c$

$= (((A^c)^\circ)^c)^c = (A^c)^\circ$, dus

$x \in (\partial A)^c \iff x \in A^\circ \cup (A^c)^\circ \Rightarrow (\partial A)^c = A^\circ \cup (A^c)^\circ$

2 — $\partial(A^c) = \partial A$

— <u>Bewijs</u> : $x \in \partial(A^c) \iff x \in \overline{A^c} \cap \overline{(A^c)^c}$

$\iff x \in \overline{A^c} \cap \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$

dus $\partial(A^c) = \partial A$ $\square$

Relatief open en relatief gesloten.

Def $X \subset \mathbb{R}$. $A \subset X$. De relatieve afsluiting van A met betrekking tot X is $\bar{A} \cap X$

Def Men noemt $A \subset X$ gesloten m.b.t. X als $\bar{A} \cap X = A$. Dit is equivalent met $\bar{A} \cap X \subset A$ aangezien $A \subset X$ en $A \subset \bar{A}$ dus $A \subset \bar{A} \cap X$ geldt altijd.

Prop $A \subset X \subset \mathbb{R}$. TFAE:

(i) A is relatief gesloten mbt X

(ii) $\exists F \subset \mathbb{R}$ F gesloten en $A = X \cap F$

(iii) voor elke rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A$ die convergent is met $\lim_{n \to \infty} a_n = b \in X$ geldt $b \in A$

Bew (i) $\Rightarrow$ (ii). we hebben $A = \bar{A} \cap X$. We hebben eerder bewezen dat $\bar{A}$ gesloten is, dus $A = F \cap X$ voor $F = \bar{A} \subset \mathbb{R}$ gesloten.

(ii) $\Rightarrow$ (i). we hebben $A = F \cap X$ voor F gesloten. dus $A \subset F$, dus $\bar{A} \subset \bar{F} = F$. Maar dan $\bar{A} \cap X \subset F \cap X = A$ dus $\bar{A} \cap X = A$

(i) $\Rightarrow$ (iii). We hebben $\bar{A} \cap X = A$. Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ rij in A die conv. naar $b \in X$. Omdat we de karakterisering van afsl. punten van A kunnen toepassen op b, $b \in \bar{A}$. maar $b \in X$ ook, dus $b \in \bar{A} \cap X = A$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Stel elke rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ die in A zit en convergeert naar $b \in X$, heeft $b \in A$. Neem dan $a \in \bar{A} \cap X$. omdat $a \in \bar{A}$, geldt wegens de karakterisering van afsluitingspunten dat er een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in A is met $\lim_{n \to \infty} a_n = a$. En $a \in X$, dus wegens de aanname (iii) volgt $a \in A$. Dus $\bar{A} \cap X \subset A$ en dus $\bar{A} \cap X = A$, wat te bewijzen was

$\diamond$

4.2.3 (Opgave) $X \subset \mathbb{R}$. Laat zien:

(i) zij $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ een collectie relatief tot X gesloten verzamelingen. Dan is $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ gesloten m.b.t. X.

Bew Schrijf $A_\alpha = F_\alpha \cap X$ voor $F_\alpha \subset \mathbb{R}$ gesloten.

Dan $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \iff \forall \alpha \in I \; x \in F_\alpha \wedge x \in X$

$\iff x \in X \wedge \forall \alpha \in I \; x \in F_\alpha$

$\iff x \in (\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha) \cap X$

en $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ is collectie v. gesl. verz. dus $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ is gesloten

dus $(\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha) \cap X$ is gesl. relatief tot X

en $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = (\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha) \cap X$, dus we zijn klaar. $\boxtimes$

(ii) $A_1, \ldots A_N$ $N \in \mathbb{N}$ gesloten relatief tot X. Dan is $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ gesloten relatief tot X

Bew Schrijf wederom $A_i = F_i \cap X$ voor $F_i \subset \mathbb{R}$ gesloten.

Dan $x \in \bigcup_{i=1}^{N} A_i \iff \exists i \in \{1, .., N\} \; x \in F_i \wedge x \in X$

$\iff x \in X \wedge \exists i \in \{1, .., N\} \; x \in F_i$

$\iff x \in (\bigcup_{i=1}^{N} F_i) \cap X$

en $\bigcup_{i=1}^{N} F_i$ is gesloten want het is de doorsnee van een eindige collectie gesl. verz. $\Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{N} F_i) \cap X$ gesl. mbt. X

dus $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ gesl. mbt X $\boxtimes$

(iii) $\emptyset$ en X zijn gesl. m.b.t. X

Bew. $\emptyset$ is gesloten, dus $\emptyset = \emptyset \cap X$ is gesloten mbt X

$\mathbb{R}$ is gesloten, dus $X = \mathbb{R} \cap X$ is gesloten mbt X.

$\boxtimes$

Def $X \subset \mathbb{R}$, $a \in A \subset X$ heet inwendig punt van A mbt X als $\exists \varepsilon > 0$ $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \subset A$

Def A heet open mbt X als $\forall a \in A \; \exists \varepsilon > 0 \; (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \subset A$

Prop TFAE: (i) A is relatief open mbt X
(ii) $\exists U \subset \mathbb{R}$, U open en $A = U \cap X$
(iii) $X - A$ is gesloten mbt X

Bew (i) $\Rightarrow$ (ii) gegeven $\forall a \in A\ \exists \varepsilon_a > 0\ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \subset A$
Definieer $U = \bigcup_{a \in A} (a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a)$. Omdat open intervallen open zijn en collecties v (ook overaftelbaar) open verz. onder vereniging ook weer open zijn, is U open.
Bovendien $a \in A \Rightarrow a \in (a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a)$ dus $A \subset U$ en $A \subset X$ dus $A \subset U \cap X$. Resteert nog $U \cap X \subset A$.
Dit doen we als volgt: stel $u \in U \cap X$. Dan $u \in X$ en $\exists a \in A\ u \in (a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a)$ dus $\exists a \in A\ u \in (a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a) \cap X$ en deze $\subset A$ per aanname $\Longrightarrow u \in A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Stel $A = U \cap X$ en $\forall u \in U\ \exists \varepsilon > 0\ (u - \varepsilon, u + \varepsilon) \subset U$
neem $a \in A$, dan $a \in X$ en $a \in U$. Dus $\exists \varepsilon > 0\ (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$
dan $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \subset U \cap X = A$ dus a is inw. punt van A relatief tot X, dus $\forall a \in A$ a inw A mbt X
$\Rightarrow A$ open mbt X.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). stel $A = U \cap X$ met U open. Dan U^c gesloten, en $x \in X - A \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin A$
$\Leftrightarrow x \in X \wedge (x \notin U \vee x \notin X) \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin U$
$\Leftrightarrow x \in X \cap U^c$. Maar U^c is gesloten dus $U^c \cap X$ is gesloten mbt X. $\Longrightarrow X - A$ is gesloten mbt X.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Stel $X - A$ is gesloten mbt. X.
Dan is er dus een $F \subset \mathbb{R}$ met F gesloten en $X - A = F \cap X$. Neem nu $U = F^c$. Dan is U open.
We willen aantonen $A = U \cap X$. Hoe?
$x \in A (\subset X) \Leftrightarrow x \in X \wedge \neg\neg x \in A \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin X - A$
$\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin F \cap X \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin F$
$\Leftrightarrow x \in X \cap F^c \Leftrightarrow x \in U \cap X$. $\Rightarrow$ (ii). $\boxtimes$
want U open, dus $A = U \cap X$ open.

(Opgave) $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ $\underbrace{\text{open relatief tot } X}_{A_\alpha \ \forall \alpha \in I}$, dan

(i) $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ open relatief tot X.

(ii) $A_1, \dots, A_N$ eindige collectie $A_i \subset X$ open mbt X
$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{N} A_i$ open mbt. X

(iii) $\emptyset$ en X zijn open mbt X.

Bew (i) $A_\alpha = U_\alpha \cap X$ voor $U_\alpha \subset \mathbb{R}$ open. Dan
$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(U_\alpha \cap X) = X \cap \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ en $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ is open
dus $X \cap \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ is open mbt X.

(ii) $A_i = U_i \cap X$ voor $U_i \in \mathbb{R}$ open. Dan
$\bigcap_{i=1}^{N} A_i = \bigcap_{i=1}^{N}(U_i \cap X) = X \cap \bigcap_{i=1}^{N} U_i$ en $\bigcap_{i=1}^{N} U_i$ is open
dus $X \cap \bigcap_{i=1}^{N} U_i$ is open mbt X.

(iii) $\emptyset = \emptyset \cap X$ en $\emptyset$ is open $\Rightarrow$ $\emptyset$ open mbt X
$X = \mathbb{R} \cap X$ en $\mathbb{R}$ is open $\Rightarrow$ X is open mbt X.

$\boxtimes$

§4.3 Rijcompactheid

Def $A \subset \mathbb{R}$ heet rijcompact als er voor elke rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $a_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$, een deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ is die convergent is en $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = b \in A$

4.3.2 (Opgave) Laat zien:

(i) een rijcompacte verzameling is gesloten.

Bew neem $b \in \overline{A}$. Wegens karakterisering van afsluitingspunten geldt dat er een $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is met $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A$ zodat $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Nu geldt dat er een deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$

van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is met $L = \lim_{j\to\infty} a_{n_j}$ en $L \in A$. Maar elke deelrij van een convergente rij convergeert naar dezelfde limietwaarde, dus, ~~...~~ $L = b$, dus $b \in A$. Hiermee volgt $\overline{A} \subset A$ dus $A = \overline{A}$

(ii) als A rijcompact is en $A \supset B$ en B is gesloten, dan is B rijcompact.

<u>Bew</u> zij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij met $b_n \in B$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dan $b_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ wegens $B \subset A$. A is rijcompact, dus er is een deelrij $(b_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ van b die convergent is, zeg $L = \lim_{j\to\infty} b_{n_j}$ en $L \in A$ want A is rijcompact. Maar $(b_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ is een rij met $\forall j \in \mathbb{N}$ $b_{n_j} \in B$, dus $L \in \overline{B}$ wegens de karakterisering van afsluitingspunten. Tevens $\overline{B} = B$ dus $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ met $b_n \in B$ $\forall n \in \mathbb{N}$ heeft een deelrij $(b_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ met limiet $L \in B$ $\Longrightarrow$ voor will. dus elke rij in B, dus B is rijcompact

(iii) Stel $A \subset B$ en A is niet rijcompact. Kunnen we concluderen dat B het ook niet is? <u>Nee</u>

<u>Bew</u> neem $A = (0, 1]$. A is niet rijcompact, want $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ is convergent en $\forall n \in \mathbb{N}_1$ $\frac{1}{n} \in (0, 1]$, en $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ convergeert naar 0. Elke deelrij van $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ zal naar dezelfde limiet convergeren, dus er is geen deelrij met limiet bevat in A $\Longrightarrow$ A is niet rijcompact.

neem $B = [0, 1]$. B is begrensd, dus elke rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ in B ($b_n \in B$ $\forall n \in \mathbb{N}$) heeft een convergente deelrij wegens Bolzano - Weierstrass.
en deze heeft een limiet welke wegens karakterisering van afsluitingspunten in $\overline{B}$ ligt en $\overline{B} = B$ want $[0, 1]$ is gesloten $\Longrightarrow$ B is rijcompact.

Deze A, B vormen dus een tegenvoorbeeld $\boxtimes$

(Stelling van Heine - Borel)

$A \subset \mathbb{R}$. Dan is A rijcompact $\iff$ A gesloten en begrensd

Bew "$\Rightarrow$": Stel A is rijcompact. In de opgave volgde dat A gesloten was. We bewijzen uit het ongerijmde dat A begrensd is.

Stel A is onbegrensd, dus $\forall L \in \mathbb{R}\ \exists a \in A\ |a| > L$
Dan is voor $n \in \mathbb{N}$ steeds $A_n = \{a \in A \mid |a| > n\} \neq \emptyset$.
Kies dus met het keuze-axioma steeds $a_n \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dan $a_n \in A_n \subset A$ dus $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is een rij in A.
Kies een willekeurige deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.
Als $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ convergent is in A, dan is er een $L \in A$
met $\forall \varepsilon > 0\ \exists J \in \mathbb{N}\ \forall j \geq N\ |a_{n_j} - L| < \varepsilon$.
kies $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en verkrijg $J \in \mathbb{N}$ met $-\frac{1}{2} < a_{n_j} - L < \frac{1}{2}$ $\forall j \geq J$.
dus $|a_{n_J}| < |L| + \frac{1}{2}$. maar ook. kies nu
$K \in \mathbb{N}$ met $K > |L| + \frac{1}{2}$. Dan $K > J$, immers zou $K \leq J$
dan $|a_{n_J}| > n_J$ (want $a_{n_J} \in A_{n_J}$) $\geq J \geq K > |L| + \frac{1}{2}$
dus $|a_{n_J}| > |L| + \frac{1}{2}$, terwijl $\big||a_{n_J}| - |L|\big| \leq |a_{n_J} - L| < \frac{1}{2}$
contradictie. Dus $K > J$. maar dan moet ook $|a_{n_K} - L| < \frac{1}{2}$
want $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ convergeert. Maar dan
$\big||a_{n_K}| - |L|\big| \leq |a_{n_K} - L| < \frac{1}{2}$ dus $|a_{n_K}| < |L| + \frac{1}{2}$,
terwijl $|a_{n_K}| > n_K \geq K > |L| + \frac{1}{2}$. $\lightning$.

Dus er zijn rijen in A welke niet een convergente deelrij bezitten, dus A is niet rijcompact als A onbegrensd is $\Longrightarrow$ rijcompact, dan begrensd.
(en gesloten hadden we al bewezen, zie opgave)

"$\Leftarrow$" Stel A is gesloten en begrensd.
Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een willekeurige rij in A, dus $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A$. A is begrensd dus $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A$
is begrensd

dus we vinden een convergente deelrij van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met Bolzano-Weierstrass. Vervolgens merken we op dat $L = \lim_{j\to\infty} a_{n_j}$ heeft $L \in \overline{A}$, en $\overline{A} = A$ dus we vinden voor een willekeurige rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in A dat er een deelrij is welke convergeert naar een $b \in A$ $\Longrightarrow$ A rijcompact $\boxtimes$

4.3.4 (Opgave)

(i) $A_\alpha, \alpha \in I$ rijcompact, , dan is $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ rijcompact.

Bew A_α, $\alpha \in I$ zijn begrensd en gesloten wegens Heine-Borel. Dan $\bigcap_\alpha A_\alpha$ gesloten, en ook begrensd want als voor A_i geldt, dat M_α een bovengrens is: $\forall a \in A_\alpha \; |a| < M_\alpha$, dan is M_α ook een bovengrens voor $a \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, want $a \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow a \in A_\alpha \Longrightarrow |a| < M_\alpha$

Dus $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ is gesloten en begrensd, en dus rijcompact wegens de stelling van Heine-Borel

(ii) als $A_1, .. A_N$ rijcompact zijn, dan is $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ dat ook. $(N \in \mathbb{N})$

Bew $A_1, .. A_N$ zijn gesloten en begrensd, dus weten we al dat $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ gesloten is. Bovendien is deze vereniging begrensd, want

$\forall i = 1, .. N : \exists M_i \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A_i \quad |a| < M_i$

Dus voor $M = \max\{M_1, .. M_N\}$ (neem maximum over eindige verzameling, is welgedefinieerd) geldt

voor $a \in \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ volgt $\exists i \in \{1, .. N\}$ $a \in A_i$

dus $|a| < M_i \leq M$ $\Longrightarrow$ M is begrenzing voor $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ $\square$

als tegenvoorbeeld bij een oneindige collectie rijcompacte verzamelingen en de vereniging daarvan,

zie : $\bigcup_{n \geq 0} [-n, n] = \mathbb{R}$, of , voor een begrensd tegenvoorbeeld.

$\hookrightarrow$ rij : $(n)_{n \in \mathbb{N}}$

zie : $\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] = (0, 1)$

of zelfs $\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] = (0, 1]$

$\hookrightarrow$ rij : $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$