CH3 Sequences (Rijen)

3.1

Def Een rij in X is een functie $a: \mathbb{N} \to X$
We noteren deze als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en met $a_n := a(n)$

andere notaties $(a_0, a_1, ..)$ of $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

Def Een rij heet (als we X een totaal g. verz. nemen zoals $\mathbb{R}$)

- stijgend : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geq a_n$
- strikt stijgend: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n$
- dalend : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n$
- strikt dalend: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$

- constant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = a_n$

- monotoon, als een vd bovenstaande geldt.

Def een functie $f: A \to B$ waar A, B totaal geordende verz. zijn met "$\leq$", heet stijgend wanneer en als dit door $<$ verv. kan worden strikt

$$\forall x, y \in A \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Def als $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een strikt stijgende functie is, dan definiëren we een deelrij van een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ als $a \circ f$

noteren we $n_j := f(j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$
dan kunnen we schrijven

$$a \circ f = (a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$$

De eerste propositie is nu:

Prop. elke rij heeft een monotone deelrij

Bew noteer de rij als $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en definieer de verzameling

$$\mathcal{H} = \{ n \in \mathbb{N} \mid \forall m > n \quad a_m < a_n \}$$

Als $\mathcal{H}$ oneindig is, dus er is een bijectie $\mathcal{H} \cong \mathbb{N}$, neem dan deze bijectie strikt stijgend, dus construeer zo een rij in $\mathcal{H}$, $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ $n_k \in \mathcal{H}$ met $n_{k+1} > n_k$. Dan is voor $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$ want $a_{n_k} > a_m$ voor $\forall m > n_k$

Als $\mathcal{H}$ eindig is, dan construeren we een strikt stijgende $k \mapsto n_k$ inductief door:
omdat $\mathcal{H}$ eindig is, is er een $N \in \mathbb{N}$ met $\forall n \geq N$ $n \notin \mathcal{H}$. Definieer $n_0 = 0$
en als we n_k weten, definiëren we n_{k+1} als: omdat $\overset{n_k \geq N}{\Rightarrow} n_k \notin \mathcal{H}$, $\exists m > n_k \; a_{n_k} \leq m$
en neem dus $n_{k+1} := m$. Dan $n_{k+1} > n_k$
en voor $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_{k+1}} \leq a_{n_k}$ per constructie.
Hoe gebruiken we dan dat $\mathcal{H}$ eindig is? Dit hebben we alleen nodig om $n_0 = N$ te vinden :)

$\boxtimes$

Hiermee gaan we straks o.a. Bolzano-Weierstrass' stelling aantonen!

Def Een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ heet begrensd als $\{ a_n \in X \mid n \in \mathbb{N} \}$ begrensd is.
wederom onderscheiden we van boven / beneden

Convergente rijen. neem nu $X = \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ kan ook, neem dan steeds $|\cdot|$ als modulus)

§3.2

Def $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heet convergent als er een $L \in X$ is met

$$\exists L \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - L| < \varepsilon$$

Notatie $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Vb constante rij $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar c
want $\varepsilon > 0$, dan met $N = 0$, $n \geq N$ geldt
$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ $\square$

Prop (Uniciteit van limieten) stel a conv. naar L
dan is L unieke limiet

Bew stel $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} a_n = M$
Dan

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - L| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N' \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - M| < \varepsilon$

dus $|L - M| \leq |a_n - L| + |a_n - M| < 2\varepsilon$ voor $n \geq \max\{N, N'\}$
nu hebben we wat extra resultaten nodig.
We stellen dit bewijs uit tot na deze resultaten
$\square$

(Opgave) Stel elke deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ van a is convergent met $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = L$, dezelfde L.

Laat zien dat a conv. naar L.

Bew Uit het ongerijmde: stel a conv. niet naar L

$\cancel{\forall} \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - L| < \varepsilon$, equivalent

(1) $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N \ |a_n - L| \geq \varepsilon$

definiëer dan een deelrij van a als volgt: (inductief).
voor 0, zij n_0 de $n \geq N$ zodat voor de ε
uit (1) geldt $|a_n - L| \geq \varepsilon$. Dan $n_0 \in \mathbb{N}$ en $n_0 \geq 0$
in het algemeen voor $k \in \mathbb{N}$ is er een $n \geq n_{k-1}+1$ waar n_{k-1} al gedefinieerd was
$|a_n - L| \geq \varepsilon$. neem n_k als die n (zoals gegeven door (1))
Dan zien we $n_k \geq n_{k-1} + 1 > n_{k-1}$ dus $k \mapsto n_k$
is strikt stijgend. En er geldt dus voor
de deelrij $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ dat

$\exists \varepsilon > 0 \; \forall k \in \mathbb{N} \; |a_{n_k} - L| \geq \varepsilon$ dus i.h.b. voor $N \in \mathbb{N}$
kiezen we een $k \geq N$, dan $|a_{n_k} - L| \geq \varepsilon$.

met andere woorden $\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists k \geq N \; |a_{n_k} - L| \geq \varepsilon$
Dus $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergeert niet naar L, maar is wel
een deelrij van a. Terwijl elke deelrij van
a convergeert ↯
We concluderen dat a convergeert en wel naar L ☒

(Opgave) stel a is een conv. rij naar L
laat zien dat elke deelrij van a conv. is, en wel
naar L

<u>Bew</u> zij $j \mapsto n_j$ s. stijgend voor $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ deelrij
van a.

Gegeven : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; |a_n - L| < \varepsilon$
Neem een $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$
met $|a_n - L| < \varepsilon$ voor alle $n \geq N$.
Omdat $j \mapsto n_j$ stijgend is en $n_0 \geq 0$ (want $n_0 \in \mathbb{N}$)
volgt $n_j \geq j$. Kies dus $J = N$. Als $j \geq J$
dan $n_j \geq j \geq J = N$, dus $|a_{n_j} - L| < \varepsilon$

Dus $\forall \varepsilon > 0 \; \exists J \in \mathbb{N} \; \forall j \geq J \; |a_{n_j} - L| < \varepsilon$
Dit betekent precies dat een will. dus alle deelrijen van a
convergeren naar L.

☒

Prop We hebben dus bewezen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall (a_{n_j})_{j=0}^{\infty} \text{ "deelrij van" } a \quad \lim_{j\to\infty} a_{n_j} = L$$

Opm we noemen niet-conv. rij "divergent".
Bovendien hebben we notatie

"$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$" betekent $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ a_n > M$

"$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$" betekent $\forall L \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ a_n < L$

Prop Een convergente rij a is begrensd.

Bew Gegeven is $\exists L \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - L| < \varepsilon$
Dus neem $\varepsilon = 1$ in deze definitie.
Dan vinden we een $N \in \mathbb{N}$ zodat
$\forall x \in \{a_n \mid n \geq N\}\ L - \varepsilon < x < L + \varepsilon$ $\varepsilon = 1$, oftewel (driehoeksong.)
$\forall x \in \{a_n \mid n \geq N\}\ |x| < |L| + |1| = |L| + 1$
Dus $\{|a_n| \mid n \geq N\}$ is begrensd door $|L| + 1$
Anderzijds is $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a_n \mid n < N\} \cup \{a_n \mid n \geq N\}$
en $\{a_n \mid n < N\}$ is eindig dus heeft een maximum
en ook $\{|a_n| \mid n < N\}$ eindig en maximum, zeg
$M = \max_{n < N} |a_n|$. Dus

$\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ is begrensd door $\max\{M, |L| + 1\}$
$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is per definitie begrensd (= van boven en van onder bgd.) $\boxtimes$

St. Monotone begrensde rijen zijn convergent ($\mathbb{R}$)

Bew We bewijzen dit alleen voor stijgende van boven begrensde rijen. Het geval dalende van beneden bgde rijen gaat geheel analoog en is zelfs tot dit geval terug te voeren door $-a$ te bekijken.

We werken noodzakelijk met reële rijen.
Stel a is begd. van boven en stijgend.
Dan bestaat $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Noem dit $\underline{u}$.

We gebruiken een klein lemmatisch resultaat:

Lemma a stijgend, dan $\forall m,n \in \mathbb{N}$ $m \geq n$ $a_m \geq n$.
Want met inductie naar $k = m-n \geq 0$:
$\underline{\text{IB}}$ $k=0$ $a_m = a_n \Rightarrow a_m \geq a_n$. Neem $k \geq 1$, dan:
$\underline{\text{IS}}$ $a_m = a_{n+k} = a_{n+(k-1)+1} \geq a_{n+(k-1)} \underset{\text{IH}}{\geq} a_n$
want definitie $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n$ $\boxtimes$

Neem nu $\varepsilon > 0$ willekeurig. $u+\varepsilon > u$ en $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq u$.
bovendien is $u - \varepsilon < u$ dus $\exists x \in \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $x > u - \varepsilon$.
en $x = a_N$ voor een $N \in \mathbb{N}$.
Voor alle $n \geq N$ geldt vervolgens $a_n \geq a_N > u - \varepsilon$
en ook, $n \in \mathbb{N}$ dus $a_n \leq u < u + \varepsilon$. Dus
$\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $u-\varepsilon < a_n < u+\varepsilon$. Dus, voor will. $\varepsilon > 0$:
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $|a_n - u| < \varepsilon$.

$\boxtimes$

Opm Als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ begrensd is en monotoon, dan zijn er twee gevallen:
(i) stijgend: gebruik dat a van boven bgd is $\Rightarrow$ a conv.
(ii) dalend: gebruik dat a van beneden bgd is $\Rightarrow$ a conv.

naar limietwaarde $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ respectievelijk $\boxtimes$

St (Bolzano - Weierstrass) Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij

Bew Kan nu heel kort: a heeft een monotone deelrij (we kunnen niet kiezen of deze dalend of stijgend is), zeg $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$
Dus als deze stijgend is, pas dan (i) toe $\Rightarrow (a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ is convergent. En analoog voor dalend.

$\boxtimes$

Nu gaan we iets heel triviaals bewijzen over de rij $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ $(= (\frac{1}{n+1})_{n=0}^{\infty}$ if you insist $)$

Lemma $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_1\}$ dan $\inf A = 0$

Bew merk op $\frac{1}{n} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_1$ dus 0 is een ondergrens. Nu is te bewijzen dat er geen kleinere is.

Stel $u > 0$ is ondergrens voor A. Dan $2u > 0$ dus $\exists N \in \mathbb{N}_1$ $\frac{1}{N} < 2u$. Maar dan $2N \in \mathbb{N}$ en $\frac{1}{2N} < \frac{1}{2} \cdot 2u = u$ $\Rightarrow$ $\exists N' \in \mathbb{N}_1$ $\frac{1}{N'} < u$ voor $N' = 2N$
$\Rightarrow$ u is geen ondergrens voor A, contradictie $\square$

Prop de rij $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}_1}$ convergeert naar 0.

Bew we weten voor $n \in \mathbb{N}_1$ dat $n+1 > n$ dus $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ dus $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}_1}$ is een dalende rij die van beneden begrensd is (lemma) en $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$ heeft (lemma) $\Rightarrow$ pas de stelling toe dat elke dalende onder begrensde convergent is met $\lim_{n \to \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$, dan volgt $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ conv en:
$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ $\boxtimes$

Gevolg Voor $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ hebben we de resultaten:

(i) $\forall r \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ $n \geq r$
(ii) $\forall x, y$ $x < y$ $\exists q \in \mathbb{Q}$ $x < q < y$
(iii) $\forall x > 0$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $N\varepsilon > x$
(iv) $(\forall \varepsilon > 0$ $x \leq y + \varepsilon)$ $\Leftrightarrow$ $x \leq y$

"$\Leftarrow$" is triviaal, "$\Rightarrow$" is nieuw.

(iii) Heet ook wel de Archimedische Eigenschap.

Bew (i). als $x \leq 0$, neem $n = 0$. Als $x > 0$
dan $\frac{1}{x} > 0$ dus $\frac{1}{x} > \inf A \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{N} < \frac{1}{x}$
dus $\exists N \in \mathbb{N}$ $N > x$ want beide > 0 dus "<"
teken klopt niet om.

(iii) neem $\varepsilon > 0$, $x > 0$, dan $\frac{\varepsilon}{x} > 0$ dus $\exists N \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{x}$ dus $N\varepsilon > x$

(ii) We beschouwen z.v.v.a. alleen $0 \leq x < y$.
– immers andere gevallen zijn $\underbrace{x < y \leq 0}_{}$ of $x < 0 < y$
en deze zijn equivalent: neem $-x, -y$, dan $\underbrace{0 \leq -y < -x}_{i}$
of neem $-x$, dan $\underbrace{0 \leq y < -x}_{ii}$ of $\underbrace{0 \leq -x < y}_{iii}$
en als we dan een q hebben gevonden dan in
[i]: $x < -q < y$ in [ii]: $-x < -q < y$, in [iii]:
$x < 0 < q < y$ dus zijn we klaar.
→ $y - x > 0$ dus er is een $N \in \mathbb{N}_1$ met $\frac{1}{N} < y - x$.
→ Voor deze N, bekijk $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq Nx\}$
wegens (i) is er een $k \in \mathbb{N}$ met $Nx \leq k$, dus $Nx < k$
dus voor alle $m \geq k + 1$ geldt $m \notin A$, dus
$A \subset \{1, \dots k\}$ en is dus eindig. $\Rightarrow$ er is een
$K = \max_{m \in A} m$. Dan $K + 1 > Nx$ en $K \leq Nx$

$$\Longrightarrow \frac{K}{N} \leq x < \frac{K+1}{N}$$

→ nu volgt samen met $\frac{1}{N} < y - x$ dat
$y > \frac{K+1}{N}$ want $y > \frac{1}{N} + x \geq \frac{1}{N} + \frac{K}{N}$, en ook dat
$x < \frac{K+1}{N}$ dus voor $\frac{K+1}{N} \in \mathbb{Q}$ geldt $x < \frac{K+1}{N} < y$ □

(iv) reduceer zvva tot $y = 0$. Want als $y \neq 0$,
neem dan $x - y \leq \varepsilon$, als we dan kunnen
bewijzen $x - y \leq 0$ dan $x \leq y$ en hebben we
het algemene geval bewezen.
Stel $\forall \varepsilon > 0$ $x < \varepsilon$ Stel $x > 0$. Dan is
er wegens (ii) een $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ met $0 < \varepsilon < x$
maar $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dus $\exists \varepsilon > 0$ $x > \varepsilon$ dus
$\exists \varepsilon > 0$ $x \not< \varepsilon$ dus $\not\forall \varepsilon > 0$ $x < \varepsilon$ contradictie
dus $x \leq 0$, wat te bewijzen was □

Met $(x \leq y+\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0) \Rightarrow x \leq y$ kunnen we:
Nu gaan we eindelijk aantonen dat limieten uniek zijn.

Prop (Limieten zijn uniek) als $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, $\lim_{n\to\infty} x_n = M$ dan $L = M$

Bew $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |x_n - L| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N' \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N' \ |x_n - L| < \varepsilon$

neem dus $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan zijn er N, N' waarvoor bovenstaande proposities gelden, met $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

Dan dus ihb. voor $K = \max\{N, N'\}$
geldt: $K \geq N$ dus $|x_K - L| < \varepsilon/2$
$K \geq N'$ dus $|x_K - M| < \varepsilon/2$

Bovendien: $|L-M| = |-(x_K - L) + (x_K - M)|$
driehoeksong.: $\leq |-(x_K - L)| + |x_K - M|$
$= |x_K - L| + |x_K - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

dus $\forall \varepsilon > 0 \quad |L-M| < \varepsilon \Rightarrow |L-M| \leq 0 \Rightarrow |L-M| = 0$
dus $L - M = 0$ want $(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0) \Rightarrow L = M$ $\boxtimes$

voor $(a_n)_{n=0}^{\infty} = a$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rijen in $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ definiëren we

(i) de scalair verm. rij ca als $(c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
(ii) de somrij $a+b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
(iii) de productrij $ab = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
(iv) de quotiëntrij, mits $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n=0}^{\infty}$

IHA definieert men analoog voor twee functies $f, g : D \to K$ voor K een lichaam $c \in K$, $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$
de functies $(cf)(x) = c \cdot f(x)$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$(fg)(x) = f(x)g(x)$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ etc.
hier $D = \mathbb{N}$, $K = \mathbb{R}$ (al kan $\mathbb{C}$ bijv. ook, of $\mathbb{Q}$)

$\boxtimes$

Wat geldt er voor deze samengestelde rijen wat betreft convergentie? precies wat je verwacht :).

St. ("De .. van 2 conv. rijen is conv. en limiet is .. v.d. limieten")

$c, d \in \mathbb{R}$ $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ conv. rijen met $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} b_n = M$

(i) $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is conv. met $\lim_{n\to\infty} ca_n = cL$

(ii) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is conv. met $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = L+M$

(iii) $(ca_n + db_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is conv. met $\lim_{n\to\infty}(ca_n+db_n) = cL+dM$

(iv) $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv met $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = LM$

(v) $b_n \neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$ en $M \neq 0$ $\Rightarrow$ $\frac{a_n}{b_n}$ conv. met $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{M}$

Bew (i) als $c=0$ dan $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is de constante nulrij, welke (dit hebben we eerder opgeschreven) conv. met limiet $c=0$ en $cL = 0\cdot L = 0$ dus (i) volgt.

als $c \neq 0$, dan $|c|>0$. Neem $\varepsilon>0$ will., dan $\frac{\varepsilon}{|c|}>0$

dus $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{|c|}$, equivalent

$\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |c||a_n-L|<\varepsilon$, equivalent

$\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |ca_n - cL|<\varepsilon$, dus ca_n conv. naar cL.

(ii) neem $\varepsilon>0$ will. dan $\frac{\varepsilon}{2}>0$, dus er zijn $N, N' \in\mathbb{N}$ met $\forall n\geq N\ |a_n - L| < \varepsilon/2$ $\forall n\geq N'\ |b_n - M| < \varepsilon/2$

dus voor $K = \max\{N, N'\}$:

$\forall n\geq K\ |a_n - L| < \varepsilon/2 \wedge |b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. dus $\forall n\geq N$:

$$|(a_n+b_n)-(L+M)| = |a_n - L + b_n - M| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists K\in\mathbb{N}\ \forall n\geq K\ |(a_n+b_n)-(L+M)|<\varepsilon$

(iii) a is conv., $c\in\mathbb{R}$ dus ca is conv. wegens (i) naar cL evenzo volgt uit b conv, en $d\in\mathbb{R}$ dat db conv is naar dM. Dus volgt uit ca, db conv. naar cL, resp. dM dat $ca+db$ conv. wegens (ii) naar $cL+dM$

(iv) Gevalsonderscheid: als $a = (0)_{n\in\mathbb{N}}$, de nulrij, dan is ab de nulrij, dus met limietwaarde

$$0 = 0\cdot M = LM.$$

als a niet de nulrij is, dan onderscheiden we voor b twee gevallen. Merk op dat a conv. is dus begrensd, $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| < C$ voor een $C > 0$ want $\exists n \in \mathbb{N} |a_n| > 0$ want $\cancel{\forall} n \in \mathbb{N}\ a_n = 0$

(1) als $M = 0$, dan
neem $\varepsilon > 0$ will. en $C > 0$
dus $\frac{\varepsilon}{C} > 0$. Dus $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{C}$
dus voor $n \geq N$,
$|a_n b_n - L \cdot M| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| = |a_n||b_n - M|$
en $|a_n| < C$, $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{C} \Rightarrow \forall n \geq N$
$|a_n b_n - LM| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$.

(2) als $M \neq 0$ dan $|M| > 0$ dus voor $\varepsilon > 0$,
$\frac{\varepsilon}{2C} > 0$ en $\frac{\varepsilon}{2|M|} > 0$ dus er is een $N, N' \in \mathbb{N}$ zodat
$\forall n \geq N\ |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2|M|}$ $\forall n \geq N'\ |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2C}$
voor $K = \max\{N, N'\}$ geldt $\forall n \geq K$:
$n \geq N$ dus $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2|M|}$ en $n \geq N'$ dus $|b_n - M| < \varepsilon/(2C)$

dus $|a_n b_n - LM| = |a_n b_n + a_n M - a_n M - LM|$
$\leq |a_n b_n - a_n M| + |a_n M - LM|$
$= |a_n||b_n - M| + |M||a_n - L|$
$|a_n| < C$, $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2C}$, $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2|M|}$

$< C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + |M| \cdot \frac{\varepsilon}{2|M|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(v) we bewijzen dit eerst voor $a_n = 1$, dus $a = (1)_{n=0}^{\infty}$
En vervolgens merken we op dat $\left(\frac{a}{b}\right) = a\left(\frac{1}{b}\right)$
want $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dus uit $\frac{1}{b}$ en (iv) volgt het algemene geval.

Voor $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ geldt: $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - b_n}{M b_n}\right| = \frac{|M - b_n|}{|M||b_n|}$

neem, aangezien $|M| > 0$, een $\delta \in \mathbb{Q}$ met $0 < \delta < |M|$
volgens "corrolarium". Dan is er $N \in \mathbb{N}$ zodat
$\forall n \geq N\ |b_n - M| < \delta$, dus $n \geq N$, dan $-\delta < b_n - M < \delta$
dus $b_n > M - \delta \wedge b_n < M + \delta$

als $M > 0$ betekent dit $|b_n| > M - \delta^{>0}$ want $M - \delta = |M| - \delta > 0$ per keuze van δ. Als $M < 0$ dan zien we $0 < \delta < |M|$, dus $M + \delta = -|M| + \delta < 0$, dus $|b_n| > |M + \delta| > 0$

We hebben in beide gevallen een $\kappa > 0$ gevonden zodat er een $N \in \mathbb{N}$ is met $\forall n \geq N$ $|b_n| > \kappa$. deze κ is ofwel $M - \delta$ ofwel $|M + \delta|$, en deze zijn aan elkaar gelijk want als $M < 0$ dan, met $\delta > 0$ $M + \delta < 0$ want $\delta < |M|$, dus $|M + \delta| = -\delta - M = |M| - \delta$

En als $M > 0$ dan $M - \delta = |M| - \delta$.

In beide gevallen dus $|b_n| > |M| - \delta > 0$ $\forall n \geq N$ voor een $N \in \mathbb{N}$. Noem dus $\kappa = |M| - \delta > 0$.

→ Voor will. $\varepsilon > 0$ geldt nu: $|M| \cdot \kappa \cdot \varepsilon > 0$

Dus er is een $N' \in \mathbb{N}$ met $\forall n \geq N'$

$$|b_n - M| < |M| \cdot \kappa \cdot \varepsilon .$$

Dan nemen we nu $K = \max\{N, N'\}$, zodat we verkrijgen:

$n \geq K$, dan $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{M} \right| = \dfrac{|M - b_n|}{|M||b_n|}$ met $|M - b_n| < |M| \cdot \kappa \cdot \varepsilon$, $|b_n| > \kappa > 0$

dus $\dfrac{1}{|b_n|} < \dfrac{1}{\kappa}$ $\forall n \geq K$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{M} \right| < \frac{|M| \cdot \kappa \cdot \varepsilon}{|M| \cdot \kappa} = \varepsilon \qquad \boxtimes$$

voor (v) hadden we ook (wat eenvoudiger) $\delta = \frac{1}{2}|M|$ kunnen kiezen, dan volgde $|b_n| > \frac{1}{2}|M|$ voor n groot genoeg

St (Vervolg)

(vi) als $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad a_n \leq b_n$
dan $L \leq M$

(vii) (Sandwich-principe) als a, b, c rijen zijn
zodat $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad a_n \leq c_n \leq b_n$
en $\lim_{n \to \infty} a_n = L = \lim_{n \to \infty} b_n$, dan
c_n convergent en $\lim_{n \to \infty} c_n = L$

Bew (vi) We nemen $L > M$ aan en leiden een tegenspraak af.

$L > M$ dus $L - M > 0$. dus $\frac{1}{2}(L-M) > 0$

dus $\exists N' \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N' \quad |a_n - L| < \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}M$
en $\exists N'' \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N'' \quad |b_n - M| < \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}M$

daaruit volgt, voor $n \geq K := \max\{N', N''\}$, dat
$a_n > L + \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}M \qquad b_n < \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}M + M$
$= \frac{3}{2}L - \frac{1}{2}M \qquad\qquad = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}M$

omdat $L > M$, $L - \frac{1}{2}M > M - \frac{1}{2}M = \frac{1}{2}M$
dus $a_n > \frac{1}{2}L + L - \frac{1}{2}M > \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}M > b_n$ voor $n \geq K$
$\exists K \in \mathbb{N} \ \forall n \geq K \quad a_n > b_n$.
Dit is in tegenspraak met $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ a_n \leq b_n$
want voor $n = \max\{K, N\}$ geldt dan
$a_n \leq b_n$ én $a_n > b_n$. $\lightning \quad \Rightarrow L \leq M$

(vii) Voor deze situatie geldt: als we kunnen bewijzen dat c_n convergent is, dan zijn we klaar want dan volgt via (vi) dat
$L \leq \lim_{n \to \infty} c_n \leq L \implies \lim_{n \to \infty} c_n = L$

maar dan moeten we wel nog aantonen dat c_n convergent is! Dus dit is niet de manier...

beter: de bedoeling...
Het blijkt eenvoudiger om een ε-bewijs te geven.
Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig, dan zijn er $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ met

$\forall n \geq N_1 \quad |a_n - L| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_2 \quad |b_n - L| < \varepsilon$

dus voor $N = \max\{N_1, N_2\}$ volgt

$\forall n \geq N$ dan $-\varepsilon + L < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$

$\Rightarrow \quad -\varepsilon < c_n - L < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |c_n - L| < \varepsilon$ QED.

3.3 Cauchy Rijen, limsup en liminf.

Def a heet een cauchyrij als

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n,m \geq N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

Prop elke conv. rij is een cauchy-rij.

Bew We hebben $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad |a_n - L| < \varepsilon$
Neem $\varepsilon > 0$ willek., dan $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$, dus
$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad |a_n - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Neem $m, n \geq N$,
dan
$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - L - (a_m - L)| \\ &\leq |a_n - L| + |a_m - L| \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$
$\boxtimes$

— Later zullen we (Analyse II) in meer algemene metrische ruimtes gaan werken. Daar gebeuren soms andere dingen dan wat we hier zien. maar we blijven bepaalde (algemenere) rijen Cauchy konvergent noemen.

In $\mathbb{R}$ blijken de begrippen bijv. equivalent te zijn. De omkering volgt namelijk straks. Maar dit hoeft niet altijd waar zijn! Let dus op de definitie. We hebben het <u>hier</u> <u>altijd</u> over reële rijen

— Opgave: Laat zien dat Cauchy-rijen bgd zijn.

Bew Neem $\varepsilon = 1 > 0$. Dan $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n,m \geq N \ |a_n - a_m| < 1$
dus in het bijzonder $\forall m \geq N \quad |a_N - a_m| < 1$
dus $\forall m \geq a_N \quad |a_m| < |a_N| + 1$

dus $\{a_m \mid m \geq N\}$ is bgd met grens $|a_N| + 1$.

en $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a_n \mid n < N\} \cup \{a_m \mid m \geq N\}$
en $\{a_n \mid n < N\}$ is eindig, dus heeft een maximum, zeg $M = \max\limits_{n<N} a_n$

Dus $a \in \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow |a| < M \vee |a| < |a_N|+1$
Dus $\max\{M, |a_N|+1\}$ is een grens voor $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dus $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is begrensd $\boxtimes$

Def voor $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een begrensde rij, begrensd aan beide kanten kunnen we steeds voor $k \in \mathbb{N}$

$A_k = \sup\limits_{n \geq k} a_n$ bekijken. Omdat $\{a_n \mid n \geq k\} \supset \{a_n \mid n \geq k+1\}$

* volgt $A_{k+1} = \sup\limits_{n \geq k} a_n \leq \sup\limits_{n \geq k+1} a_n = A_{k+1}$

Dus $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is een dalende rij en begrensd omdat a dat is

$\Rightarrow$ definieer $\limsup a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{k \geq n} a_k\right) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}}\left(\sup\limits_{k \geq n} a_k\right)$

Def Analoog $B_k = \inf\limits_{n \geq k} a_n$ dalend bgd rij

$\Rightarrow$ definieer $\liminf a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\inf\limits_{k \geq n} a_k\right) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k \geq n} a_k\right)$

Opm We hebben expliciet aangetoond (zie *) dat $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dalend is, maar nog niet dat deze begrensd is. Dat volgt niet zomaar ($(A_k)_{k=0}^{\infty}$ hoeft bijvoorbeeld geen deelrij van a te zijn, want een sup. is geen max.!)

Als volgt aantoonbaar:

$(a_k)_{k=0}^{\infty}$ is bgd, dus $\forall k \in \mathbb{N}$ $|a_k| \leq M$ voor een zekere $M \geq 0$. Maar dan $a_k \leq M$ $\forall k \in \mathbb{N}$, dus $\left(\sup_{k \geq n} a_k\right) \leq M$ per def. "kleinste bovengrens", en evenens $\sup_{k \geq m} a_k \geq a_n \geq -M$

$\Longrightarrow$ $|A_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Evenzo $\left(\inf_{k \geq n} a_k\right) \geq -M$ want $-M$ is ondergrens van $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ en de grootste ondergrens "inf" ligt hier altijd boven. En ook $\left(\inf_{k \geq n} a_k\right) \leq a_n \leq M$ $\Rightarrow |B_k| \leq M$ $\forall k \in \mathbb{N}$

— Een bgd monotone rij conv. naar zijn inf (dalend) of sup (stijgend)

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} a_k\right), \quad \limsup_{n \to \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} a_k\right)$$

Opgave Laat zien dat, voor a een bgd rij,

— als $x > \limsup_{n \to \infty} a_n$ $\Longrightarrow$ dan $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $a_n < x$

Bewijs: $x > \inf_{N \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geq N} a_n\right)$, dus vanwege "$x$ overschrijdt de grootste ondergrens" volgt $\exists N \in \mathbb{N}$ $\left(\sup_{n \geq N} a_n\right) < x$

maar $\forall n \geq N$ $a_n \leq \sup_{n \geq N} a_n$ per definitie van een bovengrens. Dus voor deze N,

$\forall n \geq N$ $a_n < x$ $\Longrightarrow$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $a_n < x$

— als $x < \limsup_{n \to \infty} a_n$ $\Rightarrow$ dan $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq N$ $a_n < x$

Bewijs: $x < \inf_{N \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geq N} a_n\right)$ dus $\forall N \in \mathbb{N}$ $\sup_{n \geq N} a_n > x$ per definitie ondergrens.

Maar dan $\sup_{n \geq N} a_n > x$ impliceert juist $\exists n \geq N$ $a_n > x$ omdat sup de kleinste bovengrens is en x ligt eronder. Dus $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq N$ $a_n > x$

limsup, liminf zijn ook de unieke getallen met deze eigenschap $\boxtimes$

want als S ook voldoet aan

i) $\forall x \in \mathbb{R} \left(x > S \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ a_n < x \right)$

ii) $\forall x \in \mathbb{R} \left(x < S \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N \ a_n > x \right)$

nog 2 proposities tot aan de stelling "Cauchy $\Leftrightarrow$ conv."

dan is $S = \limsup_{n\to\infty} a_n$ (anders, beschouw voor $T \neq S$ $T < \frac{T+S}{2} < S$ en leid tegenspraak af.)

In woorden, als $x > \limsup a_n$ dan zijn slechts eindig veel a_n's $> x$. Maar als $x < \limsup a_n$ dan zijn oneindig veel a_n's $> x$.
Dus tussen $\limsup a_n$ en $x < \limsup a_n$, hoe dicht x ook bij limsup komt, liggen altijd nog oneindig veel elementen in.

Prop $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ begrensde rij. Dan $\liminf a_n \leq \limsup a_n$
En als $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ convergent is, dan (dus een deelrij)

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{j\to\infty} a_{n_j} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Bew Het eerste is op te merken uit: $k \geq N$
dan $\inf_{n\geq N} a_n \leq a_k \leq \sup_{n \geq N} a_n \Rightarrow$

$\forall N \in \mathbb{N}$ $\inf_{n \geq N} a_n \leq \sup_{n\geq N} a_n$ dus wegens

"$a_n \leq b_n$, conv $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$" volgt
$\liminf a_n \leq \limsup b_n$

Het tweede: neem $(A_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ deelrij van $A_n = \sup_{k \geq n} a_k$ en $(B_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ deelrij van $B_n = \inf_{k\geq n} a_n$

$j \mapsto n_j$

met dezelfde sub-indexering als $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$.

Dan $B_{n_j} = \inf_{k \geq n_j} a_k \leq a_{n_j} \leq \sup_{k\geq n_j} a_{n_j} = A_{n_j}$.

Dus volgt wederom voor de limieten een ongelijkheid:
$\limsup_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{j\to\infty} a_{n_j} \geq \liminf_{n\to\infty} a_n$. $\boxtimes$

We kunnen convergentie van een rij zelfs karakteriseren in termen van liminf en limsup
Dat is de laatste propositie vóór de grote stelling.

Prop 3.3.9 TFAE: (i) $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ begrensd en $L = \liminf a_n = \limsup a_n$
(ii) $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent en $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Bew (ii) $\Rightarrow$ (i) : neem $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - L| < \varepsilon$
neem $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan voor N uit de def.
en $n \geq N$ geldt $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$
dus $L - \varepsilon$ is ondergrens voor $\{a_n \mid n \geq N\}$ en $L + \varepsilon$
is bovengrens voor $\{a_n \mid n \geq N\}$. $\Rightarrow L - \varepsilon \leq \inf_{n\geq N} a_n \leq \sup_{n \geq N} \leq L+\varepsilon$
de limieten van al deze 4 rijen
(de 2 buitenste zijn constant) bestaan : $L - \varepsilon \leq \liminf a_n$
$\leq \limsup a_n \leq L + \varepsilon$. Uit $\forall \varepsilon > 0$ $\limsup a_n \leq L + \varepsilon$
volgt $\limsup a_n \leq L$. Uit $\forall \varepsilon > 0$ $\liminf a_n + \varepsilon \geq L$
volgt $\liminf a_n \geq L$. $\Rightarrow L \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq L$
$\Rightarrow L = \limsup a_n = \liminf a_n$. En a_n is conv
dus bgd.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Uit de opgave in het voorgaande volgde
$x > \limsup a_n \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ x > a_n$
Analoog kunnen we aantonen:
$x < \liminf a_n \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ x < a_n$

We weten a_n bgd en $\liminf a_n = \limsup a_n = L$
Neem $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan $L + \varepsilon > \limsup a_n$
dus $\exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_1\ a_n < L + \varepsilon$. Eveneens
$L - \varepsilon < \liminf a_n$ dus $\exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_2\ a_n > L - \varepsilon$.
Voor $N = \max\{N_1, N_2\}$ geldt dan
$\forall n \geq N\ |a_n - L| < \varepsilon$, en dit voor $\forall \varepsilon > 0$ $\square$

Nu de grote stelling :

St 3.3.11 Een rij is conv. $\Leftrightarrow$ de rij is Cauchy

Bew "$\Rightarrow$": is al eerder bewezen.
"$\Leftarrow$": Stel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is Cauchy.

we hebben al bewezen dat $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dan begrensd is (immers voor $\varepsilon = 1$ is $\{a_m \mid m \geq N\}$ bgd door $|a_N| + 1$ en $\{a_m \mid m < N\}$ is eindig dus bgd door maximum). Dus de liminf en limsup zijn welgedefinieerd en bestaan. Als we kunnen aantonen limsup a_n = liminf a_n, zijn we klaar.

Neem $\varepsilon > 0$ willekeurig, dan vinden we $N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n, m \geq N$ geldt $|a_m - a_n| < \varepsilon$, dus fixeer N, dan $\forall n \geq N$ $|a_n - a_N| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow$ $\forall n \geq N$ $a_N - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a_N + \frac{\varepsilon}{2}$

Maar $\forall n \in \mathbb{N}$ is er $\sup\limits_{k \geq n} a_k$, $\inf\limits_{k \geq n} a_k$ dus

$$\forall n \geq N \qquad a_N - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf_{k \geq n} a_k \leq \sup_{k \geq n} a_k \leq a_N + \frac{\varepsilon}{2}$$

neem nu $\lim\limits_{n \to \infty}$, dan $a_N - \frac{\varepsilon}{2} \leq \liminf\limits_{n \to \infty} a_n \leq \limsup\limits_{n \to \infty} a_n \leq a_N + \frac{\varepsilon}{2}$

dus $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n - \liminf\limits_{n \to \infty} a_n \leq \varepsilon$ $\quad \forall \varepsilon > 0$, dus

we weten al ≥ 0, voorgaande prop.

$$\limsup_{n \to \infty} a_n - \liminf_{n \to \infty} a_n \leq 0 \Rightarrow \limsup_{n \to \infty} a_n = \liminf_{n \to \infty} a_n$$

en dit is precies de karakterisering van een convergent rijtje. $\boxtimes$

3.3.12 Een veel eenvoudiger bewijs dat een Cauchy-rij convergent is in $\mathbb{R}$, is als volgt te geven:

1) Gebruik dat Cauchy-rijen begrensd zijn, dus wegens de stelling van Bolzano-Weierstrass heeft elke Cauchyrij een convergente deelrij

2) Bewijs dat voor $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ Cauchy, met conv. deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$, de rij altijd convergent is. Dat doen we als volgt:

neem $\varepsilon > 0$, dan $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$ dus $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N\ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}$. ook $\exists J \in \mathbb{N}\ \forall j \geq J\ |a_{n_j} - L| < \frac{1}{3}\varepsilon$.
Neem nu $J' \geq J$ zodat $n_{J'} > N$. Dit kan, want als zo'n J' niet zou bestaan dan zou $j \mapsto n_j$ begrensde functie zijn, hetgeen niet kan bij een functie $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ met dus oneindig domein die strikt stijgend moet zijn.

Dus we vinden een $J' \in \mathbb{N}$ en bijhorende $N' = n_{J'}$ zodat $\forall n, m \geq N' \Rightarrow n, m \geq N$ dus $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}$.
dus $\forall n \geq N'\ |a_n - a_{N'}| < \frac{\varepsilon}{3}$
maar ook $N' = n_{J'}$ voor $J' \geq J$, dus $|a_{N'} - L| = |a_{n_{J'}} - L| < \frac{\varepsilon}{3}$. En ten slotte volgt dan, als $n \geq N'$, dan $|a_n - L| = |a_n - a_{N'} + a_{N'} - L|$
$\leq |a_n - a_{N'}| + |a_{N'} - L| < \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N' \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N'\ |a_n - L| < \varepsilon$ $\square$

3.4.2 Hoe kunnen we, analoog aan "$\frac{1}{n}$", aantonen dat voor $0 \leq r < 1$ $(r^n)_{n=0}^{\infty}$ limiet 0 heeft?

Als $r = 0$ dan is $(r^n)_{n=0}^{\infty}$ de constante nulrij
$\Rightarrow$ convergent met limiet 0.
Als $r \neq 0$, gaan we laten zien dat $(r^n)_{n=0}^{\infty}$ dalend en begrensd is met infimum (= dus de limietwaarde) 0.
Dalend: $0 \leq r < 1$, dus $r^{n+1} = r \cdot r^n < r^n$.
dus $(r^n)_{n=0}^{\infty}$ is een dalende rij (voor $a_n = r^n$ is $a_{n+1} < a_n$).
Tevens is 0 een ondergrens voor $\{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ want $r^0 = 1 > 0$ en als $r^n > 0$ dan
$r^{n+1} = \underbrace{r}_{>0} \cdot \underbrace{r^n}_{>0} > 0$. Dus $r^n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tenslotte laten we zien dat 0 ook het infimum is.
Stel immers dat er een grotere bovengrens is, zeg ε. $r \neq 0$ en $0 < r < 1$, dus $\frac{\varepsilon}{r} > \varepsilon$.
Dus er is een $N \in \mathbb{N}$ met $r^N < \frac{\varepsilon}{r}$ want $\frac{\varepsilon}{r}$ kan geen ondergrens zijn, immers $\varepsilon > 0$ is de grootste ondergrens. Maar dan $r^{N+1} = r \cdot r^N < \frac{\varepsilon}{r} \cdot r = \varepsilon$
dus er is een $N' \in \mathbb{N}$ (n.l. $N' = N+1$) met $r^{N+1} < \varepsilon$. In tegenspraak met dat ε de grootste ondergrens is. $\Rightarrow$ 0 is de grootste ondergrens

nu volgt dat $(r^n)_{n=0}^{\infty}$, welke dalend en van onder begrensd is met infimum 0, wel convergent is met limiet 0.

Als $r = 1$ dan $r^0 = 1$, en als we aannemen $r^n = 1$ dan $r^{n+1} = r \cdot r^n = 1 \cdot 1 = 1$ dus met inductie blijkt $(r^n)_{n=0}^{\infty}$ de constante rij van 1-en te zijn, welke dus wel moet convergeren naar 1.

vervolgens, als $-1 < r < 0$ dan geldt dat $0 < |r| < 1$, dus $(|r|^n)_{n=0}^{\infty}$ is convergent met limiet 0.

We bewijzen: als $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij is waarvoor $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$ convergeert naar 0, dan convergeert a_n zelf ook naar 0.

Bewijs: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ ||a_n| - 0| < \varepsilon$
dus $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ ||a_n|| < \varepsilon$

maar $||x|| = |x|$ want $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
dus $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n| < \varepsilon$
oftewel $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - 0| < \varepsilon$
$\Rightarrow$ a_n convergeert naar 0 (per definitie)

dus $(r^n)_{n=0}^{\infty}$ convergeert ook voor $-1 < r < 0$ naar 0.

We hebben hiermee laten zien:

$-1 < r < 1 \Rightarrow (r^n)_{n=0}^{\infty}$ conv. limiet 0
$r = 1 \Rightarrow (r^n)_{n=0}^{\infty}$ conv. limiet 1

Nu is nog aan te tonen dat voor $r = -1$ of $|r| > 1$, r^n divergent is.

We doen dit eerst voor $r = -1$. Neem $L \in \mathbb{R}$
als, $|L - r^n| < \frac{1}{2}$, dus $L - \frac{1}{2} < r^n < L + \frac{1}{2}$,
dan $r^{n+1} = -1 \cdot r^n$. Dan $r^n < L + \frac{1}{2}$, dus
$r^{n+1} > -\frac{1}{2} - L$ en $r^n > L - \frac{1}{2}$ dus $r^{n+1} < \frac{1}{2} - L$
dus $r^{n+1} - L > -\frac{1}{2} - 2L$, $r^{n+1} - L < \frac{1}{2} - 2L$
als $L > 0$ dan betekent dit $|r^{n+1} - L|$

St : $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+b_n)$

1 $\forall \varepsilon>0\ \exists K\in\mathbb{N}\ \forall k\ge K \quad \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \underset{(a)}{<} \inf_{n\ge k} a_n \underset{(b)}{\le} \liminf_{n\to\infty} a_n$

Want voor $k\in\mathbb{N}$ willekeurig geldt per definitie dat "sup" een bovengrens is, dat $\inf_{n\ge k} a_n \le \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\inf_{n\ge m} a_n\right)$

Dus $\forall k\in\mathbb{N}\ \inf_{n\ge k} a_n \le \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\inf_{n\ge m} a_n\right) = \liminf_{n\to\infty} a_n$
ihb. voor $\exists K\in\mathbb{N}\ \forall k\ge K$ $n\ge k$... $\Rightarrow$ (b)

Noem nu $L = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Omdat voor $\varepsilon>0$

$L-\varepsilon < \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\inf_{n\ge m} a_n\right) \Rightarrow$ "sup" is de kleinste bovengrens

dus $\exists K\in\mathbb{N}$ zodat $\inf_{n\ge K} a_n > L-\varepsilon$

maar $\left(\inf_{k\ge m} a_k\right)_{m=0}^{\infty}$ is stijgend want $\{a_k \mid k\ge m\} \supset \{a_k \mid k\ge m+1\}$
dus $\forall m\in\mathbb{N}\ \inf_{k\ge m} a_k \le \inf_{k\ge m+1} a_k$.

dus $\forall k\ge K$ $\inf_{n\ge k} a_n \ge \inf_{n\ge K} a_n > L-\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists K\in\mathbb{N}\ \forall k\ge K\ \inf_{n\ge k} a_n > L-\varepsilon$ $\Rightarrow$ (a)

2 Hiermee: $\liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)$

Want met voorgaande $L = \liminf_{n\to\infty} a_n$, vinden we voor $\varepsilon>0$ willekeurig. Dus
$\exists K\in\mathbb{N}\ \forall k\ge K\ \forall n\ge k\ L-\varepsilon < a_n \Rightarrow L+b_n-\varepsilon < a_n+b_n$
dus $\exists K\in\mathbb{N}\ \forall k\ge K \quad \sup_{n\ge k}(b_n) + L - \varepsilon \le \sup_{n\ge k}(a_n+b_n)$

~~dus~~ $\cancel{\forall\varepsilon>0\ \exists K\in\mathbb{N}\ \inf_{k\ge K}\left(\sup_{n\ge k}(b_n)\right) + L - \varepsilon \le \inf_{k\ge K}\left(\sup_{n\ge k}(a_n+b_n)\right)}$

dus voor elke $\varepsilon>0$ kunnen we links & rechts de limiet nemen:
$\forall\varepsilon>0 \quad \limsup_{n\to\infty} b_n + \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \le \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)$

Omdat $(\forall\varepsilon>0\ \ x-\varepsilon\le y) \Rightarrow x\le y$, geldt
$\limsup_{n\to\infty} b_n + \liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)$

* dit is een oefening uit een oefententamen. (alleen antwoorden)

3 (i) $A \subset \mathbb{R}$ heet rijcompact als voor elke rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A$ geldt dat er een deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ is zodat $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ convergent is met $L = \lim_{j\to\infty} a_{n_j}$ en $L \in A$.

(ii) A is rijcompact dan en slechts dan als A gesloten en begrensd is. ("Wat is d. Heine-Borel stelling?")

(iii) als A_α voor alle $\alpha \in I$ rijcompact is, dan is dus A_α voor elke $\alpha \in I$ gesloten en begrensd is. Maar dan is $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ ook gesloten, want de doorsnede van (eventueel oneindig veel) gesloten verzamelingen is gesloten en $\sup_{\alpha\in I}(M_\alpha)$ is een bovengrens voor $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ als M_α een bovengrens voor A_α is.

$\Rightarrow \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ is gesloten en begrensd, dus wegens Heine Borel is $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ rijcompact.

(iv) We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel f is niet begrensd, dus $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists a \in A$ $|f(a)| > M$. Dan is voor $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow n \in \mathbb{R}$ dus $A_n = \{ a \in A \mid |f(a)| > n \} \neq \emptyset$

Dus kies met het keuzeaxioma een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A_n \subset A$

Dan volgt wegens rijcompactheid van A dat omdat $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A$ dat er een convergente deelrij $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ bestaat met $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = L \in A$. omdat $L \in A$ volgt dat $f(L) \in \mathbb{R}$ gedefinieerd is. Tevens volgt wegens continuiteit dat $(f(a_{n_j}))_{j=0}^{\infty}$ convergent is naar $f(L) \in \mathbb{R}$. Maar ook $\forall j \in \mathbb{N}$ $|f(a_{n_j})| > n_j \geq j \Rightarrow (f(a_{n_j}))_{j=0}^{\infty}$ is onbegrensd. maar convergente rijen zijn begrensd, namelijk bewezen in 1(ii). Dus dit leidt tot een tegenspraak.