Ch2 Notatie & getallen, $\mathbb{R}$, functies

Def $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, \ldots\}$

RiLi :)

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} - \{0\} \}$ $= \mathbb{Q}(\mathbb{Z})$

en de reële getallen $\mathbb{R}$ ~~zijn gedefinieerd als~~ de verzameling Dedekind-sneden in $\mathbb{Q}$. Deze blijken (Inl. Wiskunde) te voldoen aan:

fout: Dedekind-sn. zijn een mogelijke constructie. De axioma's zijn door Hilbert geformuleerd en er zijn verschillende constructies die aan deze axioma's voldoen. Zo'n constructie noemt men (1.) een "model" voor de axioma's.

Elke begrensde $A \subset \mathbb{R}$ heeft een kleinste bovengrens $u^* \in \mathbb{R}$. we schrijven $u^* = \sup A$

Def En zo'n supremum u^* voldoet aan:

$\forall a \in A \quad a \leq u^*$

$\forall u \in \mathbb{R} \quad (\forall a \in A \quad a \leq u) \Rightarrow u^* \leq u$

Equivalent hiermee is:

$\forall u \in \mathbb{R} \quad u^* > u \Rightarrow (\exists a \in A \quad a > u)$ (2.)

dit is simpelweg de modus tollens van (1.)

Def een infinimum $\inf A = l^*$ voldoet aan

$\forall a \in A \quad l^* \leq a$

$\forall l \in \mathbb{R} \quad (\forall a \in A \quad l \leq a) \Rightarrow l \leq l^*$ (3.)

eq.: $\forall l \in \mathbb{R} \quad l > l^* \Rightarrow (\exists a \in A \quad l > a)$ (4.)

Def $\mathbb{C} = \{ a+bi \mid a,b \in \mathbb{R} \}$

Elke $z \in \mathbb{C}$ kan geschreven worden als

$$z = r \cdot (\cos\phi + i \sin\phi) = re^{i\phi}$$

verder $\Re z = a$, $\Im z = b$
en $\overline{z} = a - bi$, $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

Bovendien $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, gaat men na door vermenigv. uit te schrijven.

2.1.1 Zij $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$ een collectie van verzamelingen geïndexeerd door I

Te bew. $\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha^c$ en $\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha^c$

Bew

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right)^c \Leftrightarrow \nexists \alpha\in I \; x \in B_\alpha$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in I \; x \notin B_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha\in I \; x \in B_\alpha^c$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha^c$$

nu volgt wegens $(B^c)^c = B$ dat

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right)^c = \left(\bigcup_{\alpha\in I} (B_\alpha^c)^c\right)^c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pas toe} \\ \text{op } B_\alpha \text{ en } B_\alpha^c}}{=} \left(\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha^c\right)^c\right)^c$$

$$= \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha^c \qquad \boxtimes$$